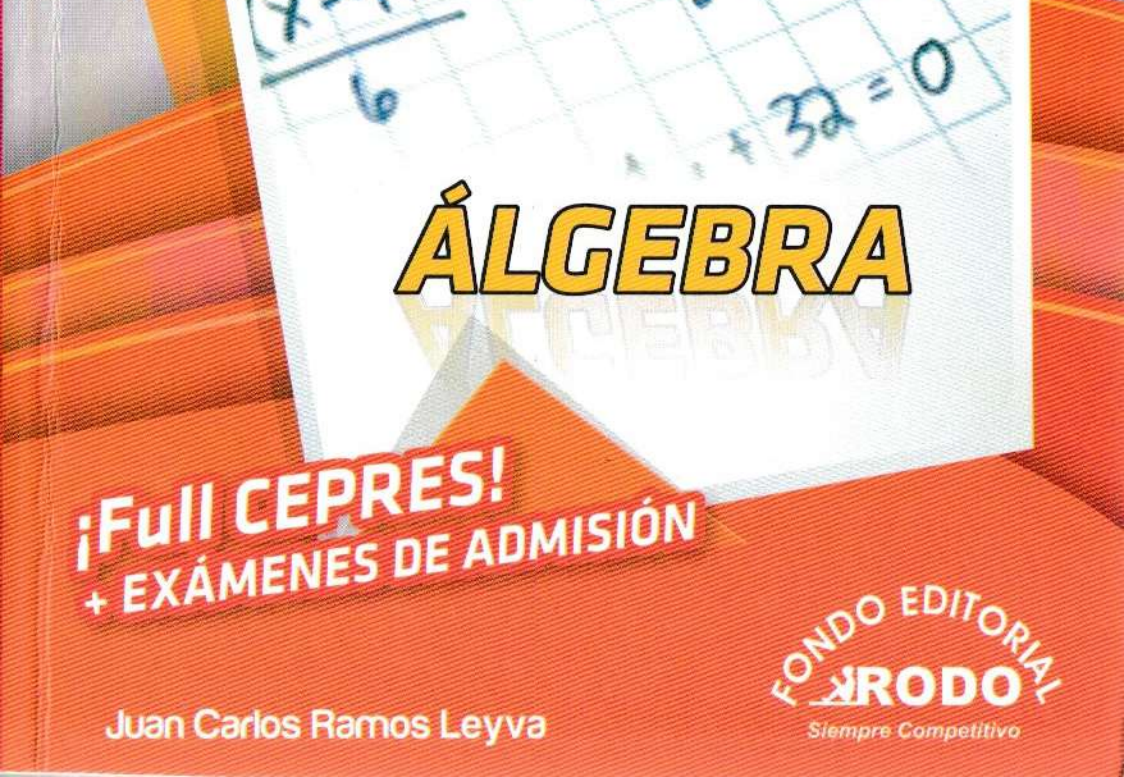




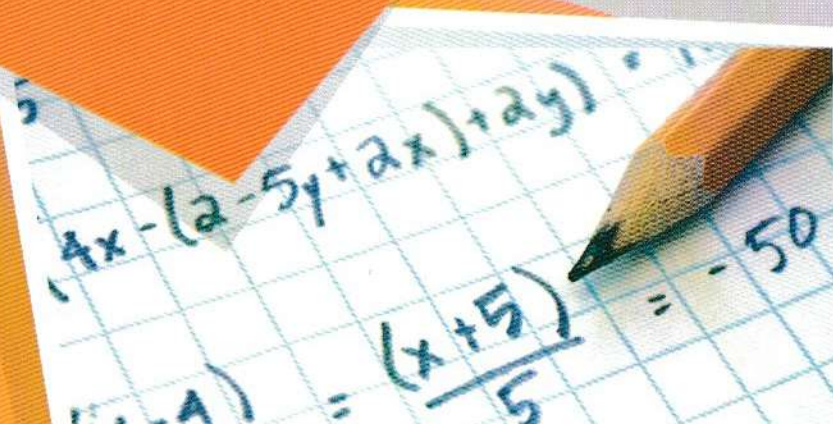
ÁLGEBRA

¡Fui CEPRES!
+ EXÁMENES DE ADMISIÓN

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODO
Siempre Competitivo

Relaciones - Funciones

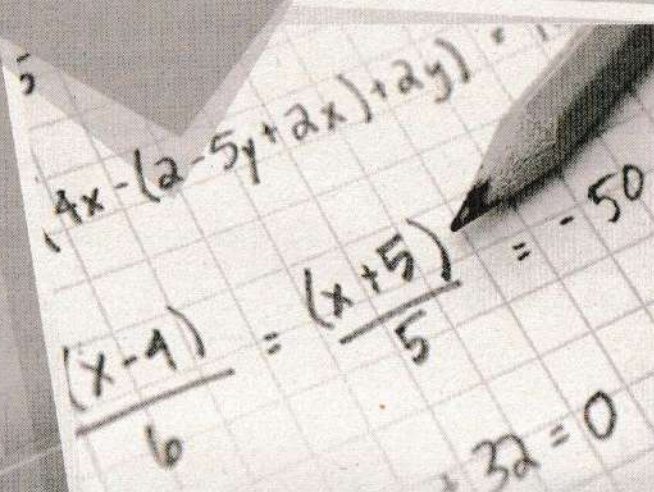




Teoría y Práctica

10

Relaciones - Funciones



Handwritten mathematical expressions on a piece of graph paper:

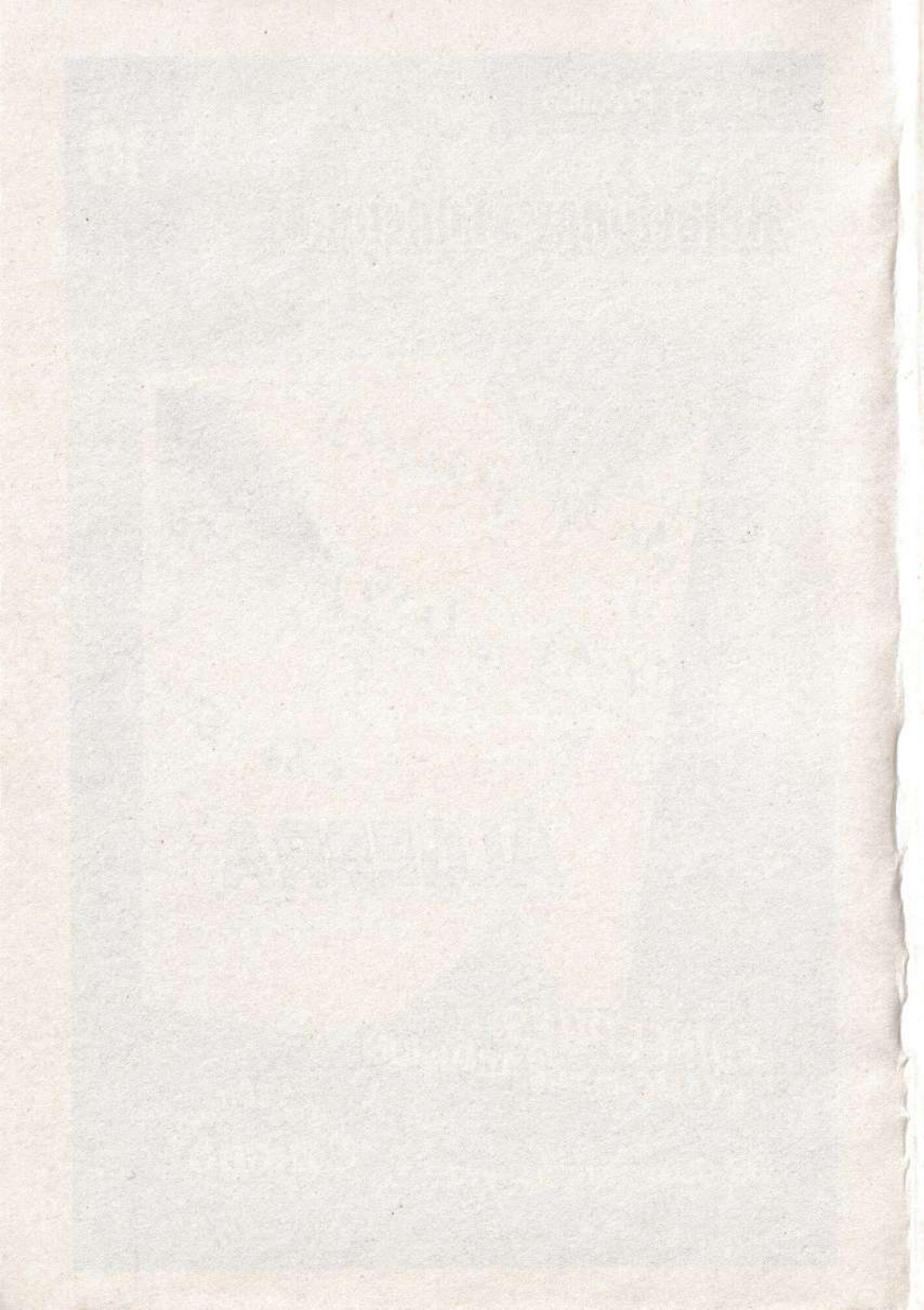
$$4x - (2 - 5y + 2x) + 2y = 1$$
$$\frac{(x-4)}{6} = \frac{(x+5)}{5} = -50$$
$$+ 32 = 0$$

ÁLGEBRA

¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
AROD
Siempre competitivo



PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2013, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO

De: Walter Z. Benítez Nuñez.

RELACIONES-FUNCIONES



ÁLGEBRA-TEMA SELECTO 10, 2da Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Junio 2016 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424 - 6350 📠 992 - 796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2016 - 08131

EQUIPO PEDAGÓGICO

Juan Carlos Ramos Leyva

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

RELACIONES

DEFINICIONES PREVIAS

- I. PAR ORDENADO:** Es un conjunto de dos elementos considerados en un determinado orden, si los elementos del par ordenado son a y b al conjunto se le denota por $(a; b)$ y se define de la manera siguiente:

$$(a; b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Donde: a = Primera componente
 b = Segunda componente

Propiedades:

- 1) $(a; b) \neq (b; a); \forall a \neq b$
- 2) $(a; b) = (c; d) \rightarrow a = c \wedge b = d$

- II. PRODUCTO CARTESIANO:** Dados dos conjuntos no vacíos A y B , el producto cartesiano de A por B (en ese orden) se denota así $A \times B$ y se define de la manera siguiente:

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Donde: A = Conjunto de partida
 B = Conjunto de llegada

Ejemplo: Dados los conjuntos

$$A = \{1; 2; 3\} \quad \wedge \quad B = \{-1; 2\}$$

Determinar $A \times B \wedge B \times A$

Resolución: Para $A \times B$ tenemos: $A \times B = \{1; 2; 3\} \wedge \{-1; 2\}$

$$A \times B = \{(1; -1), (1; 2), (2; -1), (2; 2), (3; -1), (3; 2)\}$$

Para $B \times A$ tenemos: $B \times A = \{-1; 2\} \wedge \{1; 2; 3\}$

$$B \times A = \{(-1; 1), (-1; 2), (-1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3)\}$$

Propiedades:

- 1) En general el producto cartesiano no es conmutativo.

$$A \times B \neq B \times A$$

- 2) El número de elementos de $A \times B$ es igual al número de elementos de $B \times A$ y se obtiene según la fórmula:

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B)$$

RELACIÓN BINARIA

- I. DEFINICIÓN:** Dados dos conjuntos no vacíos A y B , se dice que R es una relación de A en B (en ese orden) si y solo si R es un subconjunto de $A \times B$, es decir: $R \subset A \times B$.

$$R = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B \wedge a R b\}$$

Donde: $a R b$ indica la relación que existe entre las componentes a y b

Ejemplo: Dados los conjuntos

$$A = \{1; 2; 4\} \quad \wedge \quad B = \{2; 3\}$$

Determinar la relación R de A en B definida de la manera siguiente:

$$R = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B \wedge a < b\}$$

Resolución: Hallemos el producto cartesiano de A por B

$$A \times B = \{1; 2; 4\} \times \{2; 3\}$$

$$A \times B = \{(1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3), (4; 2), (4; 3)\}$$

Observar que los elementos de R son todos los pares $(a; b) \in A \times B / a < b$, luego tenemos:

$$R = \{(1; 2), (1; 3), (2; 3)\}$$

- II. RELACIÓN EN A:** Dado el conjunto no vacío A , se dice que R es una relación en A si y solamente si $R \subset A \times A$.

III. CLASES DE RELACIÓN: Sea R una relación en A , luego R es:

1) Reflexiva:

$$\text{Si: } \forall a \in A : (a; a) \in R$$

2) Simétrica:

$$\text{Si: } (a; b) \in R \rightarrow (b; a) \in R$$

3) Transitiva:

$$\text{Si: } (a; b) \in R \wedge (b; c) \in R \rightarrow (a; c) \in R$$

4) De Equivalencia:

Siempre y cuando sea a la vez reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo: Dado el conjunto $A = \{1; 2; 3\}$ se define una relación en A de la manera siguiente:

$$R = \{(1; 1), (1; 2), (2; 2), (3; 3), (2; 1)\}$$

¿ R es una relación de equivalencia?

Resolución: Si R es una relación de equivalencia, deberá ser reflexiva, simétrica y transitiva a la vez:

Reflexiva: $\forall a \in A \rightarrow (a; a) \in R$

$$1 \in A \rightarrow (1; 1) \in R \text{ ¡Correcto!}$$

$$2 \in A \rightarrow (2; 2) \in R \text{ ¡Correcto!}$$

$$3 \in A \rightarrow (3; 3) \in R \text{ ¡Correcto!}$$

$\rightarrow R$ es reflexiva

Simétrica: $(a; b) \in R \rightarrow (b; a) \in R$

$$(1; 2) \in R \rightarrow (2; 1) \in R \text{ ¡Correcto!}$$

Los demás casos son evidentes.

$\rightarrow R$ es simétrica

Transitiva: $(a; b) \in R \wedge (b; c) \in R \rightarrow (a; c) \in R$

$$(1; 1) \in R \wedge (1; 2) \in R \rightarrow (1; 2) \in R \text{ ¡Correcto!}$$

$$(1; 2) \in R \wedge (2; 2) \in R \rightarrow (1; 2) \in R \text{ ¡Correcto!}$$

$$(1; 2) \in R \wedge (2; 1) \in R \rightarrow (1; 1) \in R \text{ ¡Correcto!}$$

$\rightarrow R$ es transitiva.

$\therefore R$ es una relación de equivalencia.

FUNCIONES

DEFINICIÓN

Dada una relación F de A en B ($F \subset A \times B$), se dice que F es una función de A en B , si y sólo si para cada $x \in A$ existe a lo más un elemento $y \in B$ tal que el par $(x; y) \in F$, es decir que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

Ejemplo: ¿Cuál o cuales de las siguientes relaciones son funciones?

$$R_1 = \{(2; 1), (9; 3), (-1; 7)\}$$

$$R_2 = \{(3; 0), (4; 0), (5; 1)\}$$

$$R_3 = \{(5; 1), (4; -1), (4; 2)\}$$

Resolución: De acuerdo con la definición se observa que:

R_1 es función

R_2 es función

R_3 no es función ¿Por qué? Porque $(4; -1)$ y $(4; 2)$ son pares ordenados distintos con la misma primera componente

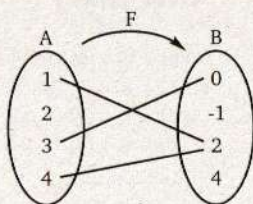
PROPIEDAD: Siendo F una función se verifica lo siguiente:

$$(x; y) \in F \wedge (x; z) \in F \rightarrow y = z$$

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN F

- I. Dominio de $F = \text{Dom}(F)$:** (D_F) Denominado también conjunto de pre - imágenes, es el conjunto de los primeros elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de partida.
- II. Rango de $F = \text{Ran}(F)$:** (R_F) Denominado también conjunto de imágenes, recorrido o contradominio, es el conjunto de los segundos elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de llegada.

Ejemplo: Dada la relación funcional representada por el diagrama sagital



Determinar la función, indicando su dominio y rango.

Resolución: Del diagrama se tiene:

$$F = \{(1; 2), (3; 0), (4; 2)\}$$

De donde: $D_F = \{1; 3; 4\} \wedge R_F = \{2; 0\}$

PROPIEDAD: Sea F una función de A en B , es decir $F : A \rightarrow B$ se cumple:

$$D_F \subset A \wedge R_F \subset B$$

APLICACIÓN

Dada una función F de A en B , $F : A \rightarrow B$; se dice que F es una aplicación si y sólo si su dominio es igual al conjunto de partida.

$$F \text{ es aplicación} \leftrightarrow D_F = A$$

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

DEFINICIÓN

Dada una función F de A en B , $F: A \rightarrow B$, si A y B son subconjuntos del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se afirmará que F es una función real de variable real.

$$F: A \rightarrow B, A \subset \mathbb{R} \wedge B \subset \mathbb{R}$$

Debido a ello F tendrá una representación gráfica en el plano cartesiano (x o y), la cual viene dada por un conjunto de puntos generados al establecer la relación de correspondencia entre la variable independiente " x " y su imagen la variable dependiente " y ", es decir:

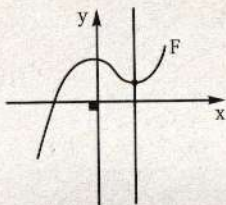
$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \in D_F \wedge y = F(x)\}$$

La igualdad mostrada: $y = F(x)$ expresa la regla de correspondencia de la función real F .

TEOREMA

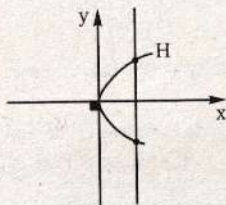
Toda recta vertical trazada a la gráfica de una función la corta a lo más en un solo punto.

Fig (1):



F corresponde a la gráfica de una función.

Fig (2):



H no corresponde a la gráfica de una función.

CRITERIOS PARA DETERMINAR EL DOMINIO Y EL RANGO

- 1) **Para el Dominio** se despeja la variable y , para luego analizar la existencia de su equivalente
- 2) **Para el Rango** se despeja la variable x , para luego analizar la existencia de su equivalente. A veces el rango se determina a partir del dominio.

**OBSERVACIÓN**

Frecuentemente para determinar dominios y rangos es necesario reconocer la existencia de las expresiones dadas dentro del conjunto de los números reales, así pues tenemos:

- $\frac{A}{B} \in \mathbb{R} \leftrightarrow B \neq 0$
- $\sqrt{A} \in \mathbb{R} \leftrightarrow A \geq 0$

Ejemplo: Determinar el dominio y el rango de la función F donde:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Resolución: De acuerdo con los criterios

Para el dominio: $y = \frac{2x+1}{x-3}$

$$y \in \mathbb{R} \leftrightarrow x-3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\therefore D_F = \mathbb{R} - \{3\}$$

Para el rango: $y = \frac{2x+1}{x-3}$

Despejamos x :

$$xy - 3y = 2x + 1$$

$$xy - 2x = 3y + 1$$

$$(y-2)x = 3y + 1$$

$$x = \frac{3y+1}{y-2}$$

$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow y-2 \neq 0$$

$$y \neq 2$$

$$y \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\therefore R_F = \mathbb{R} - \{2\}$$

Ejemplo: Determinar el rango de la función F la cual viene dada por

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = 2x - 3; x \in (5; 10]$$

Resolución: Observar que el rango se puede encontrar a partir del dominio, pues con $x \in (5; 10]$, bastará determinar la extensión de $y = 2x - 3$, veamos:

Por condición $x \in (5; 10]$

De donde tenemos $5 < x \leq 10$

Multiplicando por 2 $10 < 2x \leq 20$

Sumando -3 $7 < 2x - 3 \leq 17$

Observar que $y \in (7; 17]$

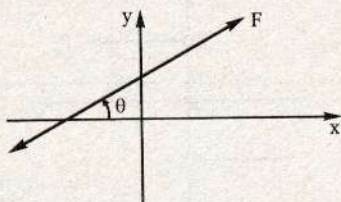
$$\therefore R_F = (7; 17]$$

FUNCIONES ESPECIALES

I. FUNCIÓN LINEAL:

$$F: y = F(x) = mx + b$$

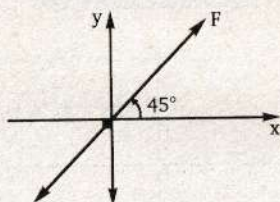
m = pendiente
 $m = \tan \theta$



$$D_F = \mathbb{R}; R_F = \mathbb{R}$$

II. FUNCIÓN IDENTIDAD:

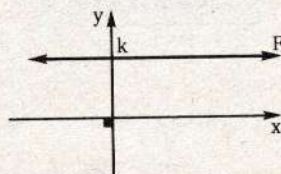
$$F: y = F(x) = x$$



$$D_F = \mathbb{R}; R_F = \mathbb{R}$$

III. FUNCIÓN CONSTANTE:

$$F: y = F(x) = k; k \in \mathbb{R}$$

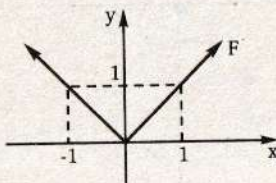


$$D_F = \mathbb{R}; R_F = \{k\}$$

IV. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO:

$$F: y = F(x) = |x|$$

$$y = |x| = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

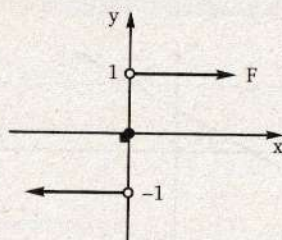


$$D_F = \mathbb{R}; R_F = [0; \infty)$$

V. FUNCIÓN SIGNO:

$$y = \text{Sgn}(x) = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases}$$

$$F: y = F(x) = \text{Sgn}(x)$$

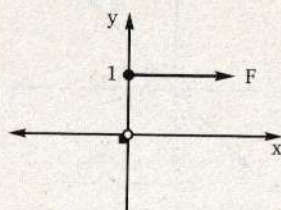


$$D_F = \mathbb{R}; R_F = \{-1; 0; 1\}$$

VI. FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO:

$$y = U(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 1; & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F: y = F(x) = U(x)$$



$$D_F = \mathbb{R}; R_F = \{0; 1\}$$

VII. FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO:

$$F: y = F(x) = \lfloor x \rfloor$$

TEOREMA:

$$\lfloor x \rfloor = y \Leftrightarrow y \leq x < y + 1; y \in \mathbb{R}$$

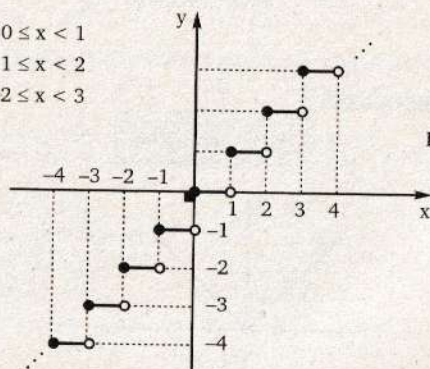
Así:

$$y = \lfloor x \rfloor = 0 \text{ para } 0 \leq x < 1$$

$$y = \lfloor x \rfloor = 1 \text{ para } 1 \leq x < 2$$

$$y = \lfloor x \rfloor = 2 \text{ para } 2 \leq x < 3$$

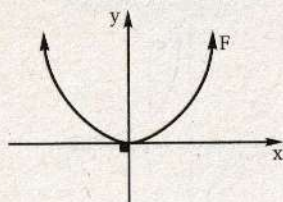
⋮



$$D_F = \mathbb{R}; R_F = \mathbb{R}$$

VIII. FUNCIÓN CUADRÁTICA SIMPLE:

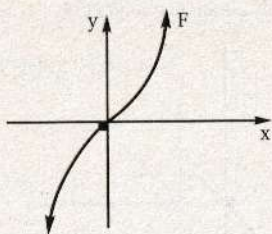
$$F: y = F(x) = x^2$$



$$D_F = \mathbb{R} ; R_F = [0; \infty)$$

IX. FUNCIÓN CÚBICA SIMPLE:

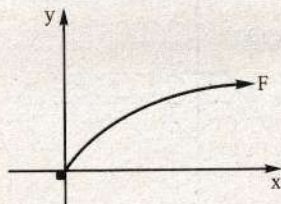
$$F: y = F(x) = x^3$$



$$D_F = \mathbb{R} ; R_F = \mathbb{R}$$

X. FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA:

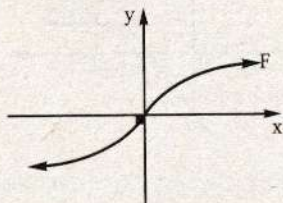
$$F: y = F(x) = \sqrt{x}$$



$$D_F = [0; \infty) ; R_F = [0; \infty)$$

XI. FUNCIÓN RAÍZ CÚBICA:

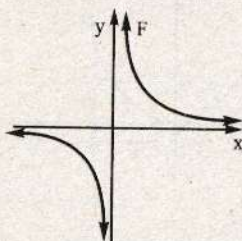
$$F: y = F(x) = \sqrt[3]{x}$$



$$D_F = \mathbb{R} ; R_F = \mathbb{R}$$

XII. FUNCIÓN INVERSO MULTIPLICATIVO:

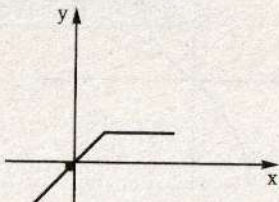
$$F: y = F(x) = \frac{1}{x}$$



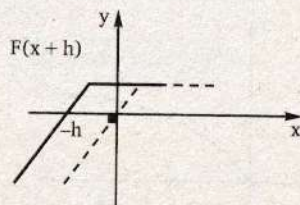
$$D_F = \mathbb{R} - \{0\} ; R_F = \mathbb{R} - \{0\}$$

DESPLAZAMIENTOS Y REFLEJOS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

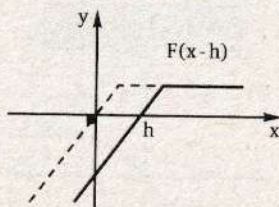
Conociendo la gráfica de la función F , donde $F: y = F(x)$



Y considerando un número positivo h , tenemos:

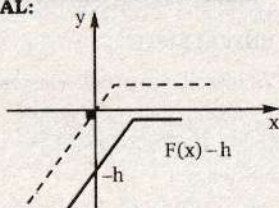
I. DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL:

" h " unidades hacia la izquierda

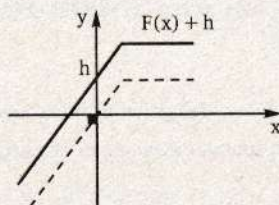


" h " unidades hacia la derecha

II. DESPLAZAMIENTO VERTICAL:

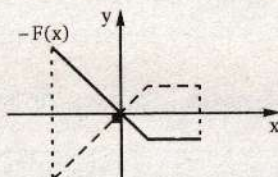


"h" unidades hacia abajo



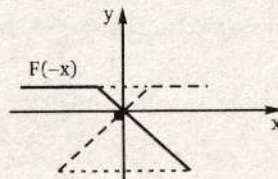
"h" unidades hacia arriba

III. REFLEJO CON RESPECTO AL EJE "x":



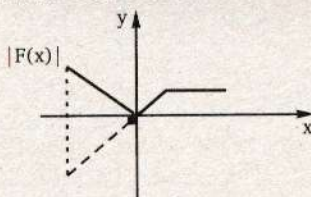
"El eje "x" se comporta como si fuese un espejo"

IV. REFLEJO CON RESPECTO AL EJE "y":



"El eje "y" se comporta como si fuese un espejo"

V. REFLEJO PRODUCIDO POR VALOR ABSOLUTO:



"La parte de la gráfica debajo del eje x, se refleja por encima del mismo"

CLASES DE FUNCIONES**1. FUNCIÓN INYECTIVA O UNIVALENTE**

Dada la función $F : A \rightarrow B$, F es inyectiva si a cada elemento del rango le corresponde un único elemento del dominio.

Ejemplo: ¿Cuál de las funciones:

$$F_1 = \{(2; 1), (7; 0), (3; -1), (5; 4)\}$$

$$F_2 = \{(1; 0), (2; 3), (5; -1), (4; 3)\}$$

es inyectiva?

Resolución: De acuerdo con la definición F_2 no es inyectiva, pues para el elemento 3 de su rango le corresponde dos elementos en su dominio 2 y 4.

$\therefore$ Sólo F_1 es inyectiva

Definición Práctica:

Dada la función:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x), x \in D_F$$

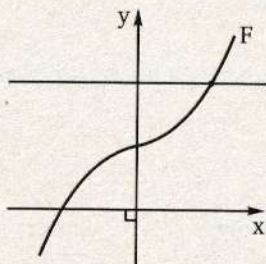
F será inyectiva si verifica la condición:

$$\text{Para cada } x_1, x_2 \in D_F / F(x_1) = F(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

Propiedad:

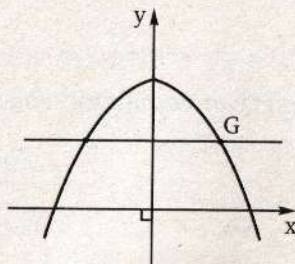
Toda recta horizontal trazada a la gráfica de una función inyectiva la corta en un solo punto.

Fig (1)



F corresponde a la gráfica de una función inyectiva.

Fig (2)



G no corresponde a la gráfica de una función inyectiva.

2. FUNCIÓN SURYECTIVA, SOBRYECTIVA O EPIYECTIVA

Dada la función F , donde $F : A \rightarrow B$, se dice que F es suryectiva si el rango de F coincide con el conjunto de llegada, es decir:

$$F \text{ es Suryectiva} \leftrightarrow R_F = B$$

3. FUNCIÓN BIYECTIVA

Dada la función F , donde $F : A \rightarrow B$, se dice que F es biyectiva si y sólo si F es inyectiva y suryectiva a la vez.

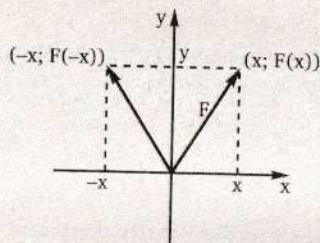
FUNCIONES NOTABLES

1. FUNCIÓN PAR

Dada la función F , donde $F : A \rightarrow B$; de modo que $x \in D_F \wedge (-x) \in D_F$ y además $F(x) = F(-x)$, entonces se dirá que F es una función par.

Propiedad:

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje de ordenadas (eje y)

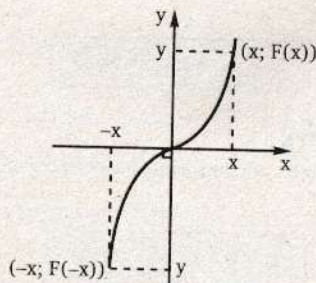


2. FUNCIÓN IMPAR

Dada la función F , donde $F : A \rightarrow B$; de modo que $x \in D_F \wedge (-x) \in D_F$ y además $F(-x) = -F(x)$, entonces se dirá que F es una función impar.

Propiedad:

La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas.



BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 10

3. FUNCIÓN PERIÓDICA

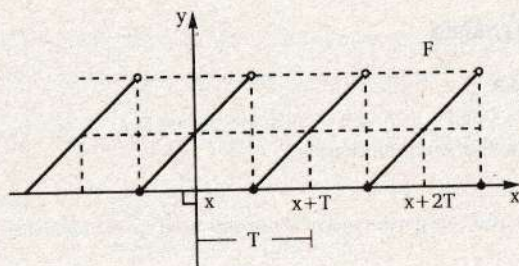
Dada la función F , donde $F: A \rightarrow B$; se dice que F es una función periódica si existe un número real $T \neq 0$ denominado período de modo que verifique simultáneamente las condiciones:

$$I) \quad x \in D_F \rightarrow (x + T) \in D_F$$

$$II) \quad F(x + T) = F(x); \quad \forall x \in D_F$$

Propiedad:

Toda función periódica tiene su gráfica de tal manera que la misma forma que tiene en un intervalo de longitud T se repite horizontalmente y periódicamente en el anterior y posterior intervalo de longitud T .



Observar que si T es un período de F , entonces $2T, 3T, \dots$ también son períodos de F . Al menor T positivo se le denomina período mínimo de la función.

FUNCIONES MONÓTONAS

1. FUNCIÓN CRECIENTE

Dada la función F , donde $F: A \rightarrow B$; se dice F es creciente si para cada $x_1, x_2 \in D_F$ se verifica la condición:

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) < F(x_2)$$

2. FUNCIÓN DECRECIENTE

Dada la función F , donde $F: A \rightarrow B$; se dice F es decreciente si para cada $x_1, x_2 \in D_F$ se verifica la condición:

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) > F(x_2)$$

3. FUNCIÓN NO DECRECIENTE

Dada la función F , donde $F: A \rightarrow B$; se dice F es no decreciente si para cada $x_1, x_2 \in D_F$ se verifica la condición:

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

4. FUNCIÓN NO CRECIENTE

Dada la función F , donde $F: A \rightarrow B$; se dice F es no creciente si para cada $x_1, x_2 \in D_F$ se verifica la condición:

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \geq F(x_2)$$

Propiedad:

Si una función F es creciente o decreciente, F será una función inyectiva.

IGUALDAD DE FUNCIONES

1. DEFINICIÓN

Dadas las funciones F y G , tal que:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x); x \in D_F$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = G(x); x \in D_G$$

Se dice que estas son iguales: $F = G$, si y sólo si verifican simultáneamente las condiciones:

I) $D_F = D_G$

II) $F(x) = G(x); \forall x \in D_F = D_G$

Ejemplo: Dadas las funciones:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = \frac{x}{x^2}$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = G(x) = \frac{1}{x}$$

¿son iguales?

Resolución: De acuerdo con la definición veamos si se verifican las condiciones

I) Para $F: y = \frac{x}{x^2}$

$$y \in \mathbb{R} \leftrightarrow x^2 \neq 0$$

$$x \neq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore D_F = \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $G: y = \frac{1}{x}$

$$y \in \mathbb{R} \leftrightarrow x \neq 0$$

$$x \neq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore D_G = \mathbb{R} - \{0\}$$

Observar que $D_F = D_G$

II) Regla de correspondencia para F :

$$F: y = F(x) = \frac{x}{x^2}$$

$$\text{Como } x \neq 0; F(x) = \frac{1}{x}$$

$\therefore F \wedge G$ son iguales

Regla de correspondencia para G :

$$G: y = G(x) = \frac{1}{x}$$

Observar que $F(x) = G(x)$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 10**ÁLGEBRA DE FUNCIONES**

Dadas las funciones F y G , donde:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x); x \in D_F$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = G(x); x \in D_G$$

Tales que $D_F \cap D_G \neq \emptyset$, se define:

1. ADICIÓN

$$F + G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = (F + G)(x) = F(x) + G(x)$$

$$D_{F+G} = D_F \cap D_G$$

2. SUSTRACCIÓN

$$F - G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = (F - G)(x) = F(x) - G(x)$$

$$D_{F-G} = D_F \cap D_G$$

3. MULTIPLICACIÓN

$$F \cdot G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = (F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x)$$

$$D_{F \cdot G} = D_F \cap D_G$$

4. DIVISIÓN

$$\frac{F}{G}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = \left(\frac{F}{G}\right)(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$$

$$D_{\frac{F}{G}} = D_F \cap D_G - \{x / G(x) = 0\}$$

Ejemplo: Dadas las funciones:

$$F = \{(2; 4), (1; -1), (5; 2), (4; 0), (3; 3)\}$$

$$G = \{(1; 2), (7; 4), (2; 1), (0; -4), (3; 0)\}$$

Determinar:

$$F + G, F - G, F \cdot G \wedge F/G$$

Resolución: Veamos los dominios de F y G

$$D_F = \{2; 1; 5; 4; 3\}$$

$$D_G = \{1; 7; 2; 0; 3\}$$

Observar que: $D_F \cap D_G = \{1; 2; 3\}$

Para $F + G$: $F + G = \{(1; F(1) + G(1)), (2; F(2) + G(2)), (3; F(3) + G(3))\}$

$$F + G = \{(1; -1 + 2), (2; 4 + 1), (3; 3 + 0)\}$$

$$\therefore F + G = \{(1; 1), (2; 5), (3; 3)\}$$

Para $F - G$: $F - G = \{(1; F(1) - G(1)), (2; F(2) - G(2)), (3; F(3) - G(3))\}$

$$F - G = \{(1; -1 - 2), (2; 4 - 1), (3; 3 - 0)\}$$

$$\therefore F - G = \{(1; -3), (2; 3), (3; 3)\}$$

Para $F \cdot G$: $F \cdot G = \{(1; F(1) \cdot G(1)), (2; F(2) \cdot G(2)), (3; F(3) \cdot G(3))\}$
 $F \cdot G = \{(1; -1 \cdot 2), (2; 4 \cdot 1), (3; 3 \cdot 0)\}$
 $\therefore F \cdot G = \{(1; -2), (2; 4), (3; 0)\}$

Para F/G : $\frac{F}{G} = \left\{ \left(1; \frac{F(1)}{G(1)} \right), \left(2; \frac{F(2)}{G(2)} \right) \right\} = \left\{ \left(1; \frac{-1}{2} \right), \left(2; \frac{4}{1} \right) \right\}$
 $\therefore \frac{F}{G} = \left\{ \left(1; -\frac{1}{2} \right), (2; 4) \right\}$



NOTA

Para $x = 3$: $\frac{F(3)}{G(3)}$ no esta bien definido

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

1. DEFINICIÓN

Dadas las funciones F y G :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x); x \in D_F$$

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = G(x); x \in D_G$$

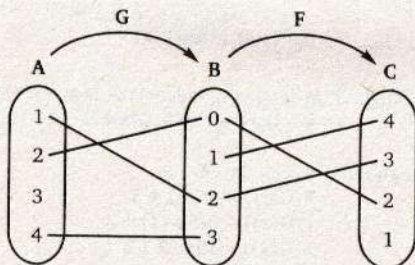
Se define la función F compuesta con G (en ese orden), denotada por $F \circ G$ de la manera siguiente:

$$F \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = (F \circ G)(x) = F(G(x))$$

Siendo su dominio:

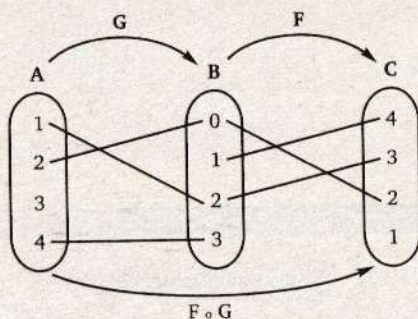
$$D_{F \circ G} = \{x/x \in D_G \wedge G(x) \in D_F\}$$

Ejemplo: Del gráfico adjunto:



Determinar $F \circ G$

Resolución: Los elementos de $F \circ G$ son aquellos pares $(x; y) / x \in A \wedge y \in C$, cuyas líneas realicen un recorrido directo desde A hasta C pasando por B, veamos:



$$\therefore F \circ G = \{(1; 3), (2; 2)\}$$

Ejemplo: Determine la función $F \circ G$, sabiendo que:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = 2x + 3; x \in \langle -4; 5 \rangle$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = G(x) = 5x - 1; x \in [-2; 0]$$

Resolución: Hallemos el dominio de $F \circ G$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} D_{F \circ G} &= \{x / x \in D_G \wedge G(x) \in D_F\} \\ x &\in [-2; 0] \wedge (5x - 1) \in \langle -4; 5 \rangle \\ -2 &\leq x < 0 \wedge -4 < 5x - 1 \leq 5 \\ -2 &\leq x < 0 \wedge -3 < 5x \leq 6 \\ -2 &\leq x < 0 \wedge -\frac{3}{5} < x \leq \frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} &< x < 0 \Leftrightarrow x \in \left\langle -\frac{3}{5}; 0 \right\rangle \end{aligned}$$

De donde: $D_{F \circ G} \neq \emptyset$, existe $F \circ G$

Hallemos la regla de correspondencia de la manera siguiente:
 $y = (F \circ G)(x) = F(G(x))$

$$\begin{aligned} \text{Se sabe que: } F(x) &= 2x + 3 \\ F(G(x)) &= 2G(x) + 3 \\ F(G(x)) &= 2(5x - 1) + 3 \\ F(G(x)) &= 10x - 2 + 3 \\ F(G(x)) &= 10x + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore y = (F \circ G)(x) = 10x + 1; x \in \left\langle -\frac{3}{5}; 0 \right\rangle$$

2. PROPIEDADES

Para las funciones F, G y H :

- I) $\exists F \circ G \leftrightarrow R_G \cap D_F \neq \emptyset$
- II) En general $F \circ G \neq G \circ F$
- III) $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$
- IV) $(F + G) \circ H = (F \circ H) + (G \circ H)$
- V) $(F \cdot G) \circ H = (F \circ H) \cdot (G \circ H)$
- VI) Siendo I la función identidad $F \circ I = F \wedge I \circ F = F$

FUNCIÓN INVERSA

1. DEFINICIÓN

Sea F una función inyectiva definida por:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x); x \in D_F$$

Luego existe su función inversa denotada por $F^* = F^{-1}$ y definida así:

$$F^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / x = F(y); x \in D_F$$

Lo cual quiere decir que F^* es el conjunto de pares ordenados obtenidos al intercambiar el primer elemento por el segundo elemento en cada par ordenado de F .

Ejemplo: Dada la función

$$F = \{(1; 0), (2; 3), (-1; 7)\}$$

Determinar F^* , si existe.

Resolución: Una rápida inspección permite observar que F es inyectiva, luego existe F^* y viene dada por:

$$F^* = \{(0; 1), (3; 2), (7; -1)\}$$

2. PROPIEDADES

Siendo F y G funciones inyectivas y la función identidad I , tenemos:

- I) $D_{F^*} = R_F$ y $R_{F^*} = D_F$
- II) $(F^*)^* = F$
- III) $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$
- IV) $F^* \circ F = I$, sobre D_F
- V) $F \circ F^* = I$, sobre D_{F^*}

Ejemplo: Determinar la inversa de F , si existe

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = 2x - 3; x \in \langle -4; 1 \rangle$$

Resolución: Fácilmente podemos observar que F es inyectiva (función lineal), luego procedemos a calcular su rango pues $R_F = D_{F^*}$

Formaremos: $y = 2x - 3$

A partir de:

$$\begin{aligned} x &\in \langle -4; 1 \rangle \\ -4 &< x < 1 \\ -8 &< 2x < 2 \\ -11 &< 2x - 3 < -1 \\ -1 &< y < -11 \\ y &\in \langle -11; -1 \rangle \end{aligned}$$

Observar que: $R_F = D_{F^*} = \langle -11; -1 \rangle$

Ahora hallaremos la regla de correspondencia de F^*

$$F : y = 2x - 3$$

$$F^* : x = 2y - 3$$

$$2y = x + 3$$

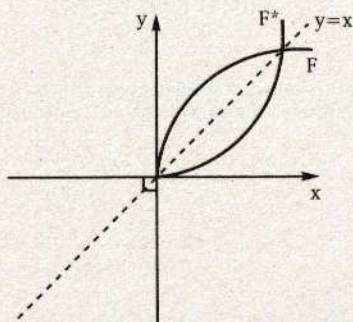
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Observar que: $F^*(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$$\therefore y = F^*(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}; x \in \langle -11; -1 \rangle$$

3. TEOREMA

Siendo F una función inyectiva, las gráficas de F y F^* son simétricas con respecto a la recta identidad $y = x$



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dados los conjuntos A y B, donde:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq -1\} \cup$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < \infty\}$$

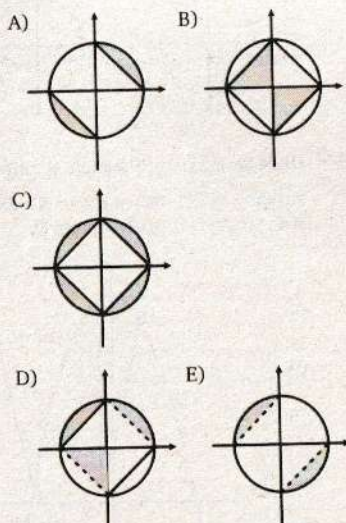
$$B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 2\} \cup \{3\};$$

entonces el conjunto $A \times B$ presenta:

- A) Una semirrecta disjunta con el tercer cuadrante.
- B) Dos semirrectas disjuntas en el cuarto cuadrante.
- C) No contiene ninguna semirrecta disjunta.
- D) Contiene dos semirrectas disjuntas, una en el segundo cuadrante y una en el primero.
- E) Dos semirrectas disjuntas, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero.

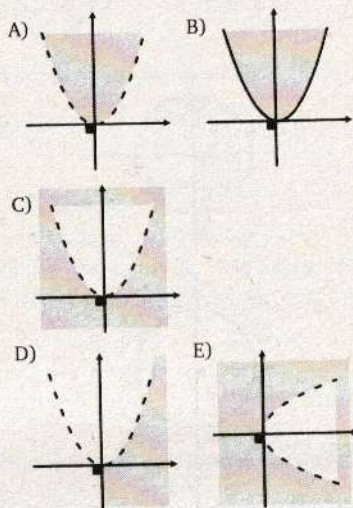
2. Hallar la región del plano en $\mathbb{R}^2$, definida por las inecuaciones:

$$\begin{cases} |x| + |y| \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$



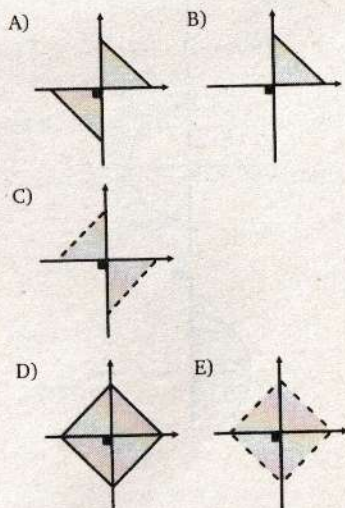
3. Graficar la relación R definida por:

$$R = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > x^2\}$$



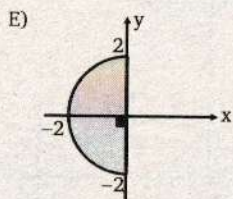
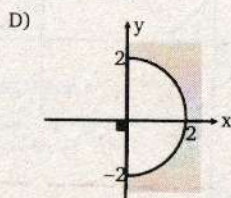
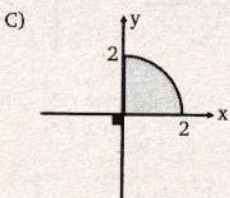
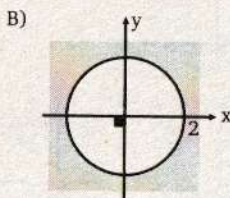
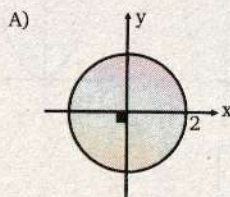
4. Halle la región del plano $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$|x| + |y| < 2$$



5. Hallar la región del plano $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$x^2 + y^2 \geq 2 \wedge x > 0.$$



6. Dados los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1; 4]\};$$

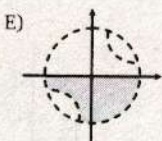
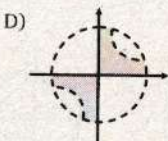
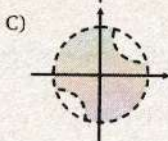
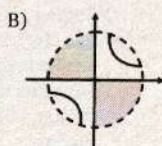
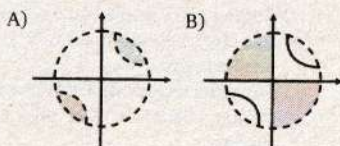
calcular el área que determina la gráfica de $A \times B$.

A) $22u^2$ B) $6u^2$ C) $15u^2$

D) $12u^2$ E) $8u^2$

7. Si: $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}/x^2 + y^2 < 2\}$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}/xy < 1\}$$



8. Halle la máxima distancia d entre las curvas $y = 2x^2 - 6x + 4$ e $y = -x^2 - 2x + 8$, si d varía del punto P al punto Q.

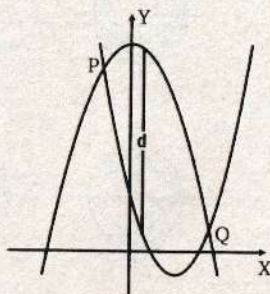
A) $\frac{7}{3}$

B) $\frac{8}{3}$

C) 3

D) $\frac{10}{3}$

E) $\frac{16}{3}$



9. Determine el rango de la función:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

- A) $\langle -2; 2 \rangle$ B) $\{ -2; 2 \}$
C) $[-2; 2]$
D) $\mathbb{R} - \{0\}$ E) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$

10. Sea F una función de proporcionalidad tal que: $F(4) + F(12) = 64$.

$$\text{Calcular : } F\left(\frac{3}{4}\right) + F\left(\frac{7}{2}\right)$$

- A) 7 B) 9 C) 11
D) 14 E) 17

11. Si F es una función lineal que verifica: $F(1) = 7 \wedge F(3) = 5$. Calcular $F(4)$.

- A) -4 B) 4 C) 3
D) -3 E) 6

12. Sea F una función constante tal que:

$$\frac{F(n-1) + F(n+1)}{F(2n)-3} = 5$$

$$\text{Calcular: } F(n^2-1) + F(n^3-1)$$

- A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

13. Si el dominio de:

$$F(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{7x - x^2 - 12}}; [a; b] - \{c\};$$

calcular: $a + b + c$.

- A) 7 B) 5 C) 12
D) 8 E) 9

14. Si: $A = \text{Dom}(F) \wedge B = \text{Ran}(F)$, siendo:

$$F(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6};$$

hallar: $A - B$.

- A) $\{-2; -3\}$ B) $\{-4; 1\}$ C) $\mathbb{R}$
D) $\langle -\infty; -4 \rangle$ E) $\langle -4; 1 \rangle$

15. Si: $F = \{(8; 2), (2; a), (a^2 - 1; b), (2; 2a - 3), (3; 5)\}$

indicar la suma del mínimo y el máximo de la función F.

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 4

16. Hallar el rango de la función F definida así: $F(x) = -3 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}; -2 \leq x < 6$

- A) $[-2; (\sqrt{17} - 3)]$ B) $\langle -3; \sqrt{17} \rangle$
C) $\langle -\infty; (\sqrt{17} - 3) \rangle$
D) $\langle -4; (\sqrt{5} - 2) \rangle$ E) $\langle -2; 6 \rangle$

17. Sea la función: $F(x) = \frac{2x+7}{-x-3}$ con dominio $x \in \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle -3; 1 \rangle$ ¿Cuál es su rango?

- A) $\langle -\infty; -\frac{9}{4} \rangle \cup \langle -2; \infty \rangle$
B) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle \frac{9}{4}; \infty \rangle$
C) $\langle -2; \infty \rangle$
D) $\langle -\infty; 2 \rangle \cup \langle \frac{9}{4}; \infty \rangle$
E) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle -2; \infty \rangle$

18. Dadas las funciones reales de variable

$$\text{real: } F(x) = 3x^2 - 12x - 15$$

$$G(x) = -x^2 + 4x - 3;$$

y los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > 0\}$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid G(x) > 0\};$$

el complemento de $A \cup B$ es:

- A) $[0; 1] \cup [2; 5]$ B) $[-1; 1] \cup [3; 5]$
 C) $[0; 1] \cup [5; \infty)$
 D) $[1; 3]$ E) $\langle -\infty; -1 \rangle \cup [5; \infty)$

19. Halle el dominio de
- f
- si la regla de correspondencia es:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{\sqrt{21} - \sqrt{x^2 - 4}}$$

- A) $x \in \langle -5; -2 \rangle \cup [4; 5)$
 B) $x \in \langle -5; 5)$
 C) $x \in \langle -2; 0 \rangle \cup \{3; 5]$
 D) $x \in \langle -3; 4]$
 E) $x \in \langle -4; 4]$

20. Determine el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sgn}(x - \sqrt{x})}$$

- A) $\langle 0; 1)$ B) $[0; 1]$ C) $[1; +\infty)$
 D) $\langle 1; +\infty)$ E) $[0; +\infty)$

21. Si
- f
- es una función definida por:

$$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$$

entonces del dominio de f es:

- A) $\langle 0; \frac{1}{2} \rangle$ B) $\langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$
 C) $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right]$
 D) $[0; \infty)$ E) $\{0\} \cup [1; +\infty)$

22. Determine el rango de la función
- f
- tal que:

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|} (x^2 + 2|x-1|)$$

- A) $\langle 2; +\infty \rangle$ B) $\langle -\infty; -1 \rangle$ C) $\mathbb{R} - [-1; 1]$
 D) $\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$ E) $\langle -1; 2 \rangle$

23. Si
- A
- es el dominio de la función
- f
- :

$$f(x) = \frac{1}{\|1-x\|+1},$$

entonces A^c es igual:

- A) $\langle 1; +\infty \rangle$ B) $\langle 1; 2 \rangle$ C) $\langle 1; 2]$
 D) $\langle 1; 3]$ E) $[-1; 2]$

24. Si
- f
- es una función definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

hallar el rango de f .

- A) $\langle -1; 1 \rangle$ B) $[0; \sqrt{2}]$ C) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right]$
 D) $[-\sqrt{2}; 0]$ E) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$

25. Determine el rango de la función:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{x}{x^2 + 4},$$

dar como respuesta $a + b$, si $S = [a; b]$ es dicho rango.

- A) -1 B) 0 C) 1
 D) 2 E) 4

26. Determinar el rango de:

$$f(x) = x + \frac{b}{x}, \quad b > 0, x > 0$$

- A) $\langle b; \infty \rangle$ B) $[b; \infty)$ C) $[2\sqrt{b}; \infty)$
 D) $\langle 2\sqrt{b}; \infty \rangle$ E) $\langle b+1; \infty \rangle$

27. Determine el rango de la función:

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}; x \in [1; 7]$$

A) $[\sqrt{3}; 3\sqrt{6}]$ B) $[2\sqrt{3}; 2\sqrt{6}]$

C) $[\sqrt{3}; 2\sqrt{6}]$

D) $[\sqrt{3}; \sqrt{6}]$ E) $[\sqrt{6}; 2\sqrt{3}]$

28. Sea la función $f: A \rightarrow [1; 3]$, $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$
halle el dominio A, si su rango es: $\langle 1; 3 \rangle$.

A) $\langle -\infty; -\frac{3}{2} \rangle$ B) $\langle -\infty; -\frac{7}{2} \rangle$ C) $\langle -\infty; -1 \rangle$

D) $\langle -\infty; 0 \rangle$ E) $\langle -\infty; 1 \rangle$

29. Si el rango de la función f definida por
 $f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - x}$ es el conjunto A, podemos afirmar que A es el conjunto

A) $\{0; 1\}$ B) $\mathbb{Z}$ C) $\mathbb{N}$
D) $\{0\}$ E) $\{1\}$

30. Determine el rango de:

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x^2+1} \right\rfloor x - \lfloor x \rfloor$$

A) $\mathbb{Z}^-$ B) $\mathbb{Z}^+$ C) $\mathbb{Z}$
D) $\mathbb{Q}$ E) $\mathbb{R}$

31. Sea la función real:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 15} - 3$$

Determine $\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f)$

A) $[-3; 5] \cup [6; +\infty)$
B) $[-3; 3] \cup [5; +\infty)$
C) $[-2; 2] \cup (3; +\infty)$
D) $\emptyset$
E) $\mathbb{R}$

32. Indicar la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

I. $f = \{ (|x|; |y|) / x = 2y, x \in \mathbb{R} \}$ es una función con dominio $[0; +\infty)$.

II. $g = \{ (x^3|x|, x) / x \in \mathbb{R} \}$ no es función.

III. $h = \{ (-|x|, x) / x \in \mathbb{R} \}$ es función.

A) FVF B) FVV C) VFF
D) VFF E) VVF

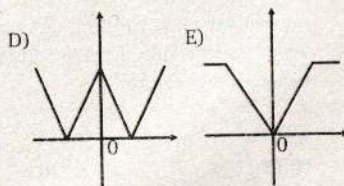
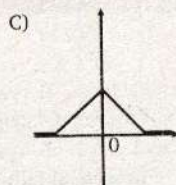
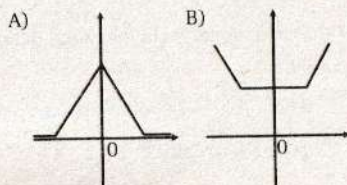
33. Hallar el dominio de:

$$f(x) = \sqrt{-x\sqrt{4-x^2}}$$

A) $[1; 2]$ B) $[0; 2]$ C) $[-1; 0]$
D) $[-2; 0]$ E) $\langle -\infty; 0]$

34. Determine la gráfica de la función:

$$f(x) = ||x| - 1|, x \in \langle -\infty; +\infty \rangle$$



35. Hallar el rango de:

$f(x) = 2x + \sqrt[3]{x^2 + 4x + 8}$, $x \in [0; 9]$
e indique la suma de su mayor y menor elemento:

- A) 2 B) $\sqrt[3]{9}$ C) 5
D) $\sqrt[3]{12}$ E) 25

36. Dada la función:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 7x - 6}{x + 5} \text{ definida sobre } \left(-\frac{3}{5}; \frac{3}{4}\right]$$

Halle el rango de $|f|$.

- A) $\left(-\frac{13}{5}; -\frac{7}{5}\right]$ B) $\left[-\frac{13}{5}; -\frac{7}{5}\right)$
C) $\left[\frac{7}{5}; \frac{13}{5}\right)$
D) $\left[\frac{25}{4}; 13\right)$ E) $\langle 7; 13]$

37. Si el dominio de la función
- f
- , definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+2}-3}, \text{ esta dado por :}$$

$\{a\} \cup [b; c]$. Calcule: $T = b - a + c$.

- A) 7 B) 4 C) 11
D) 3 E) 15

38. Se ubica el rectángulo en el primer cuadrante, cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, dos de ellos están en los ejes y dos vértices en la gráfica de

la función: $y = f(x) = -2x^2 + 8x$.

Determinar el mayor área que pueda tener el rectángulo si sus dimensiones tienen valores enteros.

- A) 6 B) 12 C) 14
D) 18 E) 20

39. Un carpintero produce sillas a un costo unitario de S/. 50. Si las vende a
- k
- soles por unidad, podrá vender aproximadamente
- $(120 - k)$
- carpetas al mes. La utilidad mensual del carpintero depende del precio de venta de las carpetas. Calcule el precio de venta (por unidad) si la utilidad es máxima.

- A) S/. 60 B) S/. 95 C) S/. 85
D) S/. 90 E) S/. 75

40. Sea la función real:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$$

Determine el conjunto:

$\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f)$

- A) $[0; +\infty)$ B) $\langle 3; +\infty)$
C) $[0; 1] \cup \langle 2; +\infty)$
D) $[1; +\infty)$ E) $\emptyset$

41. Si:
- $f(x) = \sqrt{\frac{5x}{x+5}}$

Halle: $\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f)$

- A) $[0; \infty)$ B) $\langle 0; \infty)$
C) $\langle 0; \infty) - \{\sqrt{5}\}$
D) $[0; \infty) - \{\sqrt{5}\}$ E) $\langle 0; \infty) - \{5\}$

42. Sea
- f
- la función definida mediante la regla de correspondencia:

$$f(x) = \sqrt{2-x^2} - x^2$$

Determinar el valor de verdad de los enunciados siguientes:

I. $\text{Dom } f \cap \text{Ran } f = [-2; \sqrt{2}]$

II. $\exists x_1, x_2 \in \text{Dom } f / f(x_1) = f(x_2)$

III. $\text{Ran } f / \text{Dom } f = [-2; 0]$

- A) VVV B) VVF C) FVV
D) FVF E) FFF

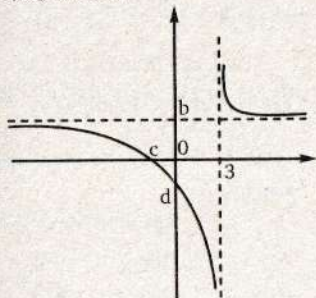
43. Determine $\text{Ran}(f)$ de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}; x > 1$$

- A) $[4; +\infty)$ B) $[4; 5]$ C) $[5; +\infty)$
D) $[3; +\infty)$ E) $(4; +\infty)$

44. Si: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{x+4}{x-a}$

cuya gráfica es:



Hallar: $T = a + b + c + d$.

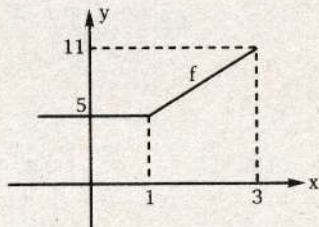
45. Sea la función definida mediante:

$$f(x) = \left\lfloor \frac{20}{x^{2010} + 1} \right\rfloor$$

Determinar la suma de los elementos del rango.

- A) 55 B) 190 C) 210
D) 232 E) 242

46. Dada la gráfica de una función f .



Hallar: $f(2) - f(-2)$.

- A) 0 B) 2 C) 5
D) 3 E) 1

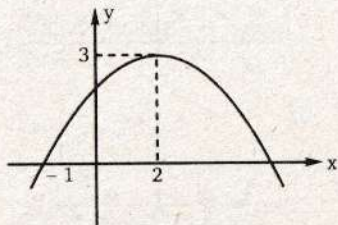
47. Si A es el mayor dominio de la función f

$$f(x) = \frac{1}{\lfloor 1-x \rfloor + 1},$$

entonces A^C es igual a:

- A) $(-2; 2)$ B) $[1; 2]$ C) $(-1; 2)$
D) $(1; 2]$ E) $(-1; 1]$

48. La figura adjunta es el gráfico de la función cuadrática f .



Determine $f(3)$.

- A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{13}{5}$
D) $\frac{14}{5}$ E) $\frac{5}{3}$

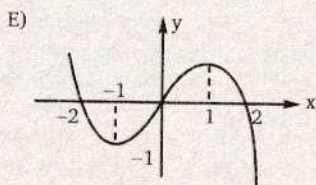
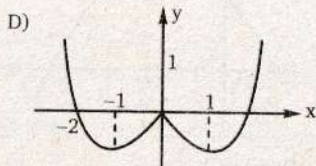
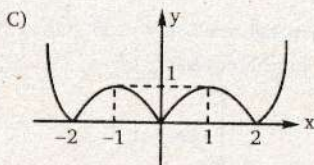
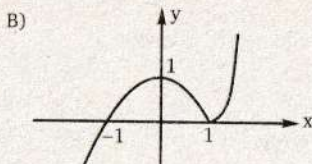
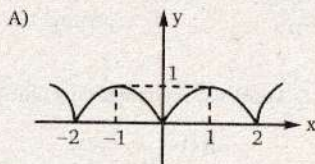
49. Hallar el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{\lceil x \rceil}{\sqrt{x - \lceil x \rceil}}$$

- A) $\mathbb{Z}^+$ B) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^+$ C) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
 D) $[0; +\infty)$ E) $\mathbb{R} - \{0\}$

50. Sea
- $f(x) = 2x - x^2$
- ,
- $x \in \mathbb{R}$
- , graficar:

$$g(x) = \max. \{ (f(|x|)); -f(|x|) \}$$



51. Halle el rango de la función:

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x^2 - 2x - 1}{2} \right\rfloor, x \in [-1; 3]$$

- A) $[-1; 1]$ B) $\{-1; 1\}$ C) $\{-1; 0; 1\}$
 D) $[0; 1]$ E) $\{0; 1\}$

52. Determine el rango de la función f, si:

$$f(x) = x^2 \operatorname{sgn} \sqrt{1 - \lceil x^2 \rceil}$$

- A) $[0; 1]$ B) $\langle 0; 1 \rangle$ C) $\langle 0; 1]$
 D) $[0; 1)$ E) $[1; 2)$

53. Sea $f(x) = \left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor \operatorname{sgn} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}|x|}{x^2-1} \right)$

Halle la suma de los elementos del rango de f.

- A) -1 B) 0 C) 1
 D) 2 E) 3

54. Sea la función definida mediante la regla:

$$f(x) = (\alpha - 7)x^2 + \frac{1}{2}(\beta - \alpha - 4)x + 2\alpha - \beta - 2,$$

$x \in \mathbb{R}$ indicar el valor de verdad de los enunciados siguientes:

- I. Si f es una función lineal, entonces:
 $\alpha\beta = 84$.
 II. Si f es una función constante, entonces $\alpha\beta = 77$.
 III. Si f es una función identidad, entonces $\alpha\beta = 91$.

- A) VVV B) VVF C) VFF
 D) FVF E) FFF

55. Sean: $g(x) = \sin(x)$,
 $h(x) = u(x + \pi) - u(x - \pi)$ definidas en

$$\mathbb{R}, \text{ donde: } u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

indique un intervalo donde:
 $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ es creciente.

A) $[0; \pi]$ B) $[-\pi; 0]$ C) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

D) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ E) $\langle -\pi; 0 \rangle$

56. Determine el número de elementos del rango de $f + g$. Si:

$$f(x) = 2x + 3; x \in \langle -2; 5 \rangle$$

$$g = \{(1;3), (2;7), (3;9), (7;12), (0;10)\}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

57. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1; & x \in [-2; 5) \\ x^2 - 10; & x \in [5; 10] \end{cases}$$

$$g = \{(2;3), (-5;4), (0;2), (8;20), (12;9)\}$$

Determinar la suma de elementos del $\text{Ran}(f + g)$.

- A) 40 B) 41 C) 43
D) 63 E) 83

58. Sean:

$$f(x) = \frac{1}{2}[(x+1)^2 - (x-1)^2]; g(x) = 2x + 1;$$

$$h(x) = (x+1)(x^2 - x + 1) - 1$$

Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $g(x) \geq f(x); \forall x \in \langle 0; 1 \rangle$

II. $g(x) \geq h(x) \geq f(x); \forall x \in \mathbb{R}^+$

III. $h(x) \geq g(x) \geq f(x); \forall x \in \langle 2; \infty \rangle$

- A) VVV B) VVF C) VFF
D) VFV E) FFF

59. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 3; & x < 0 \\ 3; & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3; & x < -3 \\ -x; & -3 \leq x < 1 \\ \frac{x+3}{2}; & x \geq 1 \end{cases}$$

Determine la regla de correspondencia de $(f + g)$ para $x \in \langle -1; 0 \rangle$

A) $\frac{2x+9}{2}$ B) $\frac{2x-7}{2}$ C) $\frac{x+5}{2}$

D) $\frac{2x+3}{2}$ E) $\frac{3x+7}{2}$

60. Sean f, g y h funciones definidas por:

$$f = \{(2;4), (3;9), (8;0)\}$$

$$g = \{(1;8), (2;8), (3;8)\}$$

$$h(x) = \begin{cases} x + 1; & x < 2 \\ 9\sqrt{x-2}; & x \geq 2 \end{cases}$$

Halle la suma de los elementos del

rango de la función: $g - \frac{h}{f}$.

- A) 12 B) 15 C) 18
D) 20 E) 21

61. Sean las funciones:

$$f = \{(-1;2), (2;2), (3;4), (4;3), (6;3)\}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x + 4; & x \in \langle -4; -1 \rangle \\ x + 3; & x \in [-1; 3] \\ -x + 7; & x \in [3; 6] \end{cases}$$

$h = 2f + g$. Halle la suma de los elementos del conjunto solución de la inecuación: $h(x) > 0$.

- A) 2 B) 3 C) 5
D) 6 E) 8

62. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} |x|; & x \in [-1; 3] \\ -2x + 3; & x \in (3; 6] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}; & x \in [1; 4] \\ \lfloor x \rfloor; & x \in [5; 7] \end{cases}$$

$$h(x) = \sqrt[3]{x}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Determine $((f \cdot g) \cdot h)(x)$. Dar la regla de correspondencia de $((f \cdot g) \cdot h)$, en $x \in (3; 4)$.

A) $(-2x+3)\sqrt{x-1}\sqrt[3]{x}$

B) $(-2x+5)\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x}$

C) $(-2x+3)\lfloor x \rfloor \sqrt[3]{x}$

D) $(-2x+3)\lfloor x+1 \rfloor$

E) $(-2x+3)\lfloor x \rfloor \sqrt{x+1}$

63. Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} |x|+2; & x < -3 \\ 5; & -3 \leq x < 5 \\ \lfloor x \rfloor; & x \geq 5 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2}; & x < 0 \\ x^2+1; & x \geq 0 \end{cases}$$

Determine la regla de correspondencia

de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ en $x \in [0; 5)$.

A) $\frac{5}{x^2+1}$

B) $\frac{\lfloor x \rfloor}{x^2+1}$

C) $\frac{5(x+2)}{x}$

D) $\frac{(|x|+2)(x+2)}{x}$

E) $\frac{2+|x|}{\lfloor x \rfloor}$

64. Sean las funciones:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} - 1; & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ es impar} \\ |x| - \lfloor x \rfloor; & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ es par} \end{cases}$$

$$h(x) = \text{sgn}(x); \quad x \in (-1; 1)$$

Halle: $\text{Ran}(f + gh)$.

A) $(-1; 1)$

B) $(-1; 0]$

C) $[0; 1)$

D) $(-1; 0)$

E) $(0; 1)$

65. Sean
- f
- y
- g
- dos funciones tales que:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8 - \lfloor x^2 \rfloor}}; \quad g(x) = \text{sgn}(\sqrt{x-2})$$

Al determinar el rango de $f \cdot g$, hallar la suma de los cuadrados de sus elementos.

A) $\frac{16}{3}$

B) $\frac{25}{4}$

C) $\frac{36}{5}$

D) $\frac{49}{2}$

E) $\frac{64}{3}$

66. Determinar
- $g(x)$
- , tal que:

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

$$f(x) = x^2; \quad x \leq 0.$$

A) $g(x) = 3 - 2x$

B) $g(x) = 2x - 3$

C) $g(x) = |2x - 3|$

D) $g(x) = -|2x - 3|$

E) $g(x) = -x^2$

67. Sean
- $f(x) = x^2 + 2x$
- ;
- $g(x) = 2x - m$
- con
- $m < 0$
- . Si
- $(f \circ g)(2) = (g \circ f)(m - 2)$
- , el valor de
- m
- es:

A) -9

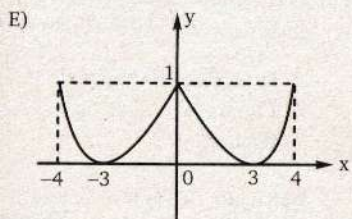
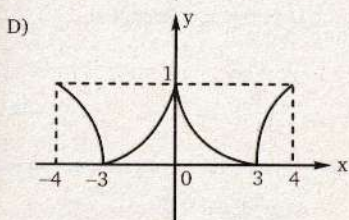
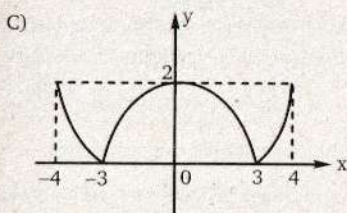
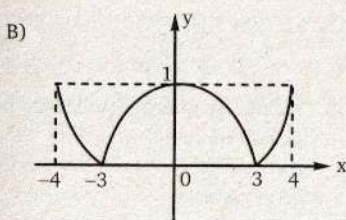
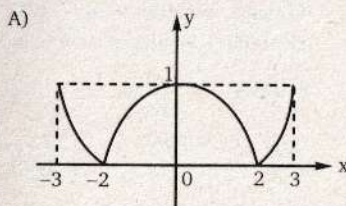
B) -8

C) -6

D) -5

E) -4

68. Si: $f(x) = \sqrt{x}$; hallar la gráfica:
 $g(x) = |1 - f(4 - |x|)|$.



69. Sea f y g , las funciones definidas por:

$$f(x) = \sqrt{|x|+1}; x \in [-1; 3]$$

$$g(x) = \begin{cases} \lfloor |x-1| \rfloor; & x < 1 \\ x^2 - 1; & x \geq 1 \end{cases}$$

Halle: $\text{Dom}(f \circ g) - \text{Ran}(f \circ g)$.

- A) $[0; 1)$ B) $[-1; 1)$ C) $(-1; 1)$
D) $[1; 2)$ E) $\{0; 1\}$

70. Sean las funciones: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f es par y g es impar, indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $f + g$ es impar.

II. $h = f \circ \mathbb{I}^3$ es par.

III. $f \circ g$ es impar.

- A) VVV B) FFV C) FVV
D) FVF E) FFF

71. Hallar el valor de $a^3 + 4$ para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 3}{2}; & x \leq a \\ 2x - x^2; & x > a \end{cases}$$

Sea inyectiva.

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

72. Sea $f: A \rightarrow B$ sobreyectiva tal que:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}$$

Calcule la suma de los elementos de:

$A - B$.

- A) -1 B) 2 C) -3
D) -2 E) 1

73. ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas?

I. $f(x) = x; \forall x \in [-2; 2]$

II. $f(x) = x^2; \forall x \in (0; 2]$

III. $f(x) = \lfloor x \rfloor; \forall x \in [-2; 2]$

- A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo I y II
D) Sólo III E) II y III

74. Si f es una función creciente, determine el conjunto A.

$$A = \{(2x+1) \in \mathbb{R} / f(|2x-1|) < f(3x+1)\}$$

- A) $\langle -\infty; 1 \rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$ C) $\langle 1; \infty \rangle$
D) $\langle 2; \infty \rangle$ E) $\langle -1; \infty \rangle$

75. Indique el valor de verdad de los siguientes enunciados.

- I. Si f es una función creciente entonces f no es par.
II. Si f no es creciente entonces f no es inyectiva.
III. Si f es creciente entonces f es impar.

- A) VVF B) VFV C) VFF
D) FFV E) FVF

76. Si $f: [0; 1] \rightarrow B$ tal que: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
es una función suryectiva entonces el conjunto B es:

- A) $\langle 0; 1 \rangle$ B) $\langle -\infty; -1 \rangle$ C) $\langle -\infty; 1 \rangle$
D) $[0; 1]$ E) $[0; 1]$

77. Sea la función real:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x; & x \leq a \\ 4x - x^2; & x > a \end{cases}$$

la cual es decreciente en $(-\infty; 1]$, creciente en $\langle 1; a \rangle$ y decreciente en $\langle a; +\infty \rangle$.

Hallar el valor de: $a^2 + 1$.

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

78. Con respecto a la función f tal que:

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2}; x > 2$$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p: f es creciente.

q: f es inyectiva

r: f^2 es creciente.

- A) VVV B) VFF C) FFF
D) FVF E) FFV

79. Se define la función biyectiva:

$$f: [3-a; 1] \rightarrow \left[\frac{b}{7}; 5 \right] / f(x) = -4 + (x-1)^2$$

Determinar el valor de ab .

- A) -120 B) -140 C) -160
D) -180 E) -200

80. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son correctos, si: $f(x) = \frac{2x}{5x-2}$?

- I. f es función biyectiva en todo su dominio.
II. $f \circ f$ es función biyectiva.
III. $f \circ f \circ f$ es función biyectiva en su dominio.

- A) I, II y III B) I y II C) I y III
D) II y III E) Sólo II

81. Si y varía inversamente con respecto a x , de manera que cuando: $x = 5$, $y = 1$. Determine el valor de y cuando x se reduce un 75%.

A) $\frac{5}{x}$ B) $\frac{10}{x}$ C) $\frac{20}{x}$
D) $\frac{30}{x}$ E) $\frac{40}{x}$

82. La carga máxima que puede soportar una columna de sección circular, varía directamente con la cuarta potencia del diámetro e inversamente con el cuadrado de la altura. Una columna de 9 metros de alto y un metro de diámetro soportará 8 toneladas métricas. ¿Cuántas toneladas métricas puede soportar una columna de 12 metros de alto y $\frac{2}{3}$ metros de diámetro?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{6}$
D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{8}{9}$

83. Sea la función:

$$f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x + 5},$$

halle el menor valor positivo k tal que:
 $|f(x)| \leq k, \forall x \in \text{Dom}(f)$, $\text{Dom}(f)$ es el mayor conjunto posible.

A) $\frac{2}{11}$ B) $\frac{8}{31}$ C) $\frac{13}{31}$
D) $\frac{11}{4}$ E) $\frac{31}{8}$

84. Sea:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{9 - x^2 - |x^2 - 1|}}$$

Determine el mayor valor $m \in \mathbb{R}$, tal que: $f(x) \geq m; \forall x \in \text{Dom}(f)$.

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{3}{4}$ E) 1

85. Si:

$$f(x) = \frac{4}{|x-1| + |x-5|}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}$$

Determine el menor número real M tal que: $|f(x) + g(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) 2

86. Sea f una función definida por:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$$

Determinar la verdad (V) o falsedad (F) de los siguientes enunciados:

- I. $\forall x \in \mathbb{R}: |f(x)| \leq \frac{3}{4}$
II. f es acotada en el conjunto $(0; \infty)$
III. $\forall x \in (1; +\infty); |f(x-1)| \leq 1$

A) VVV B) VVF C) VFF
D) VFF E) FVF

87. Sean: $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \wedge g(x) = \sqrt{2x-1}$

Calcular: $(f \circ (g \circ f) * o f)(2)$.

- A) 3 B) 5 C) 7
D) 10 E) 15

88. Se dan las funciones f y g mediante:

$$f = \{(0; 0), (1; 0), (2; 1), (3; 2), (4; 3)\}$$

$$g(x) = \sqrt{x+3}; x \in [-3; 3]$$

Determine: $a + b$, si:

$$(g^2 + f)(a) = 3 \wedge (g^2 + f)^*(6) = b$$

- A) 2 B) 3 C) -1
D) 0 E) 8

89. Si: $f(x) = (x-2)(4-x); x < 3$.

Determine la función inversa de f .

- A) $f^*(x) = 3 + \sqrt{1-x}; x < 1$
B) $f^*(x) = 3 - \sqrt{1-x}; x < 1$
C) $f^*(x) = 3 - \sqrt{1+x}; x < 1$
D) $f^*(x) = 3 + \sqrt{1-x}; x < 3$
E) $f^*(x) = 3 - \sqrt{1-x}; x < 3$

90. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}, & x \geq 3 \\ x^2 + 2x - 3, & x \in [-1; 1) \end{cases}$$

Hallar f^* , dar el valor de: $f^*(-2)$.

- A) $\sqrt{2}-1$ B) 2 C) $\sqrt{3}-1$
D) 0 E) $\sqrt{2}+1$

91. Dadas las funciones:

$$f = \left\{ (x; \sqrt{1-x}) / -3 \leq x \leq 1 \right\}$$

$$g = \left\{ (x; x^2) / \sqrt{x}(x+3) \geq 0 \right\}$$

Hallar si existe: $h = g \circ f^*$.

- A) $h(x) = (1-x^2)^2; x \in [0; 3]$
B) $h(x) = (x^2-1)^2; x \in [0; 1]$
C) $h(x) = (x^2+1); x \in [0; 1]$
D) $h(x) = (4+x^2); x \in [0; 2]$
E) $h(x) = (3-x)^2; x \in [0; 1]$

92. Dada la función:

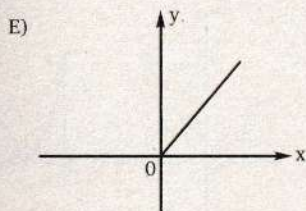
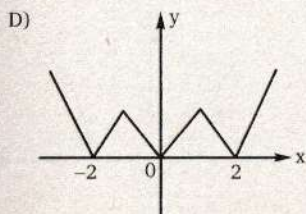
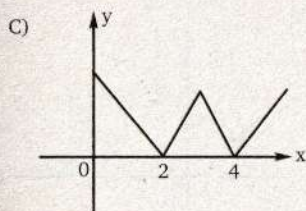
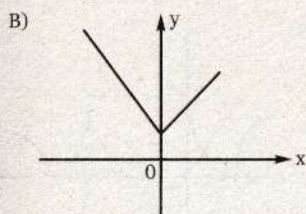
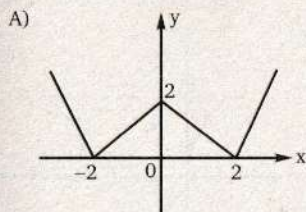
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -x^2; & x < 0 \end{cases}$$

Halle la inversa f^* .

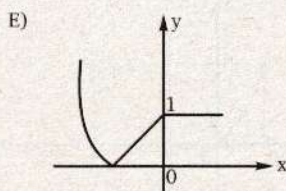
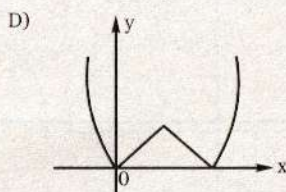
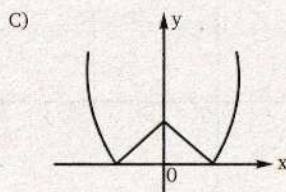
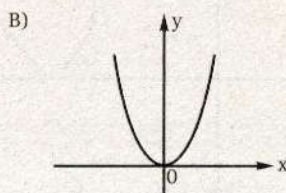
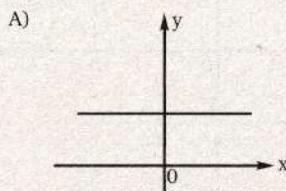
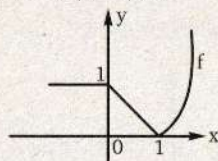
- A) $f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x > 0 \\ -x^2; & x \leq 0 \end{cases}$
B) $f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x > 0 \\ -\sqrt{-x}; & x \leq 0 \end{cases}$
C) $f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x > 0 \\ \sqrt{-x}; & x \leq 0 \end{cases}$
D) $f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x > 0 \\ 2\sqrt{-x}; & x \leq 0 \end{cases}$
E) $f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x > 0 \\ \sqrt{-x}; & x < -1 \end{cases}$

93. Graficar:

$$f(x) = ||x| - 2|; x \in \mathbb{R}.$$



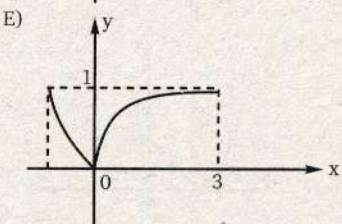
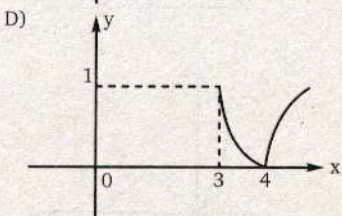
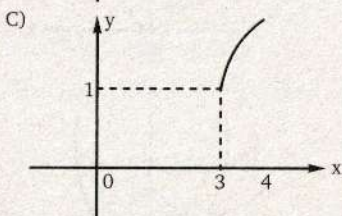
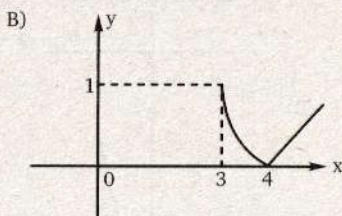
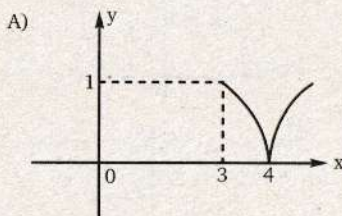
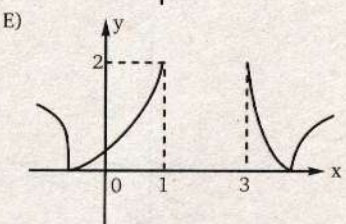
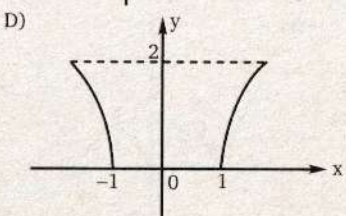
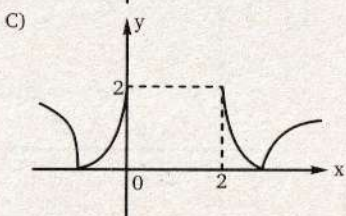
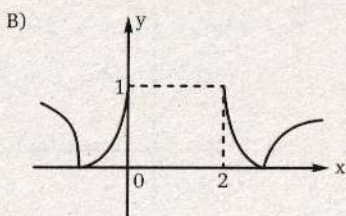
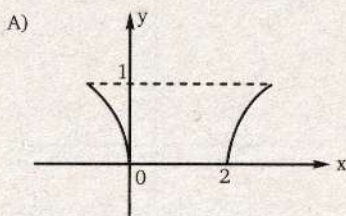
94. Indique, aproximadamente, la gráfica de: $g(x) = f(|x - 1|)$, si:



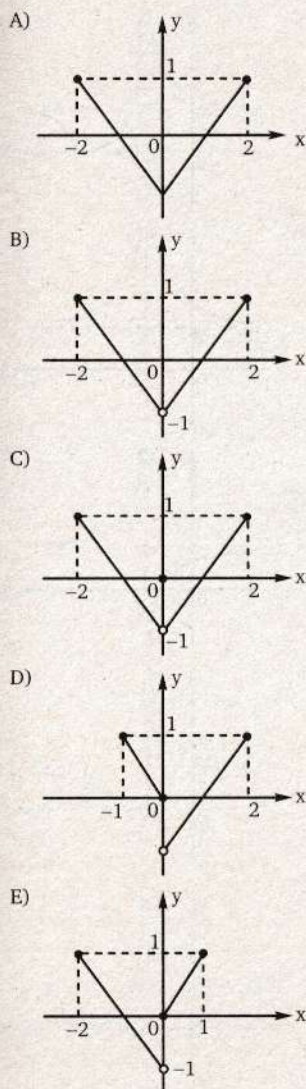
95. Determine la gráfica de:

$$f(x) = |\sqrt{x-3} - 1|$$

en su mayor dominio.

96. Sea la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ Indique la gráfica que mejor representa a $g(x) = |2 - f(x-1)|$.

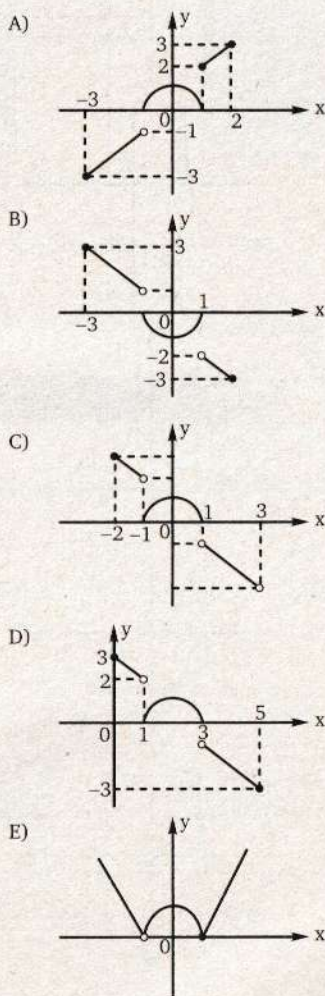
97. Sea la función f , definida por:
 $f(x) = x \operatorname{sgn}(x-1); -1 \leq x \leq 2$. Halle el
 gráfico de la función g definida por:
 $g(x) = f(1 - |x|)$



98. Sea la función definida por:

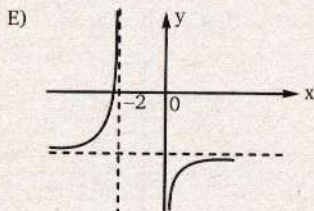
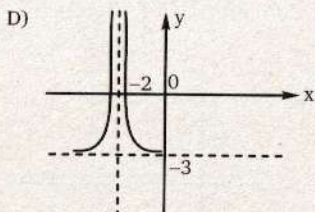
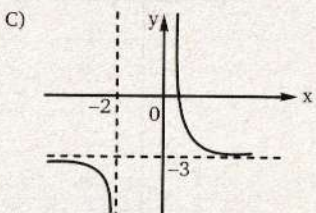
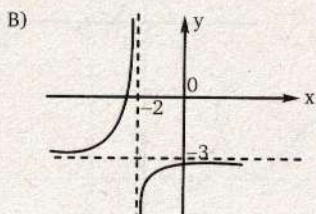
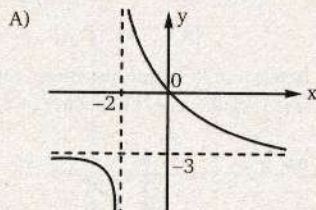
$$f(x) = \begin{cases} x; & x \in [-3; -1] \\ \sqrt{1-x^2}; & x \in [-1; 1] \\ x+1; & x \in (1; 2] \end{cases}$$

Determine la figura que mejor representa la gráfica de la función $f(2-x)$



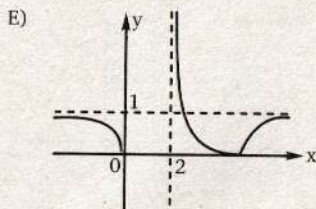
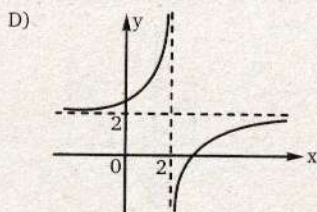
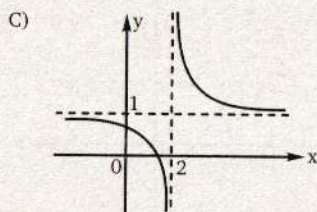
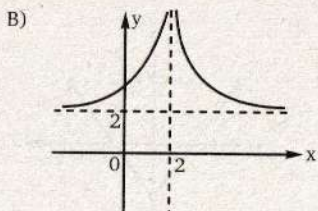
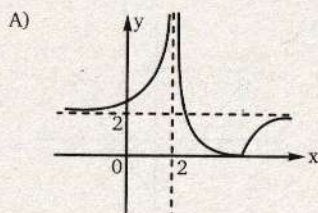
99. Trace, aproximadamente, la gráfica de:

$$f(x) = \frac{-3x}{x+2}; x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$



100. Indique la gráfica que mejor representa a la función g:

$$g(x) = \left| \frac{10-2x}{x-2} \right|$$

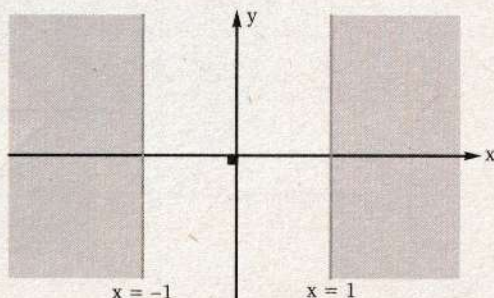


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

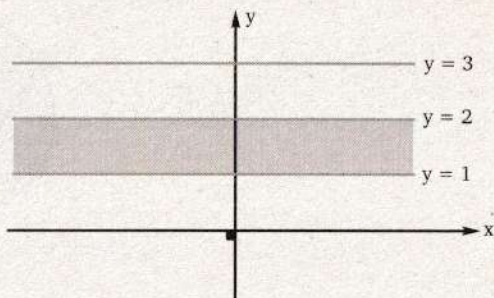
Resolución 1:

Graficando cada conjunto:

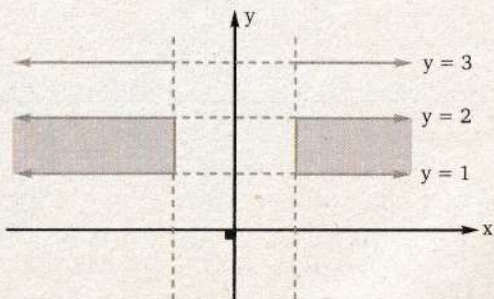
$$I. A = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < \infty\}$$



$$II. B = \{y \in \mathbb{R} / 1 \leq y \leq 2\} \cup \{3\}$$



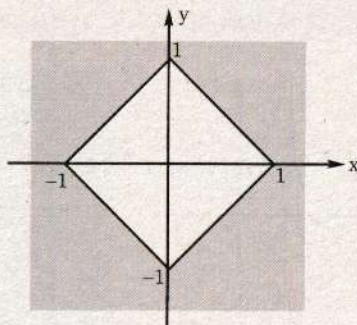
Finalmente la gráfica de $A \times B$ viene dada por la intersección de las gráficas de A y B, veamos:



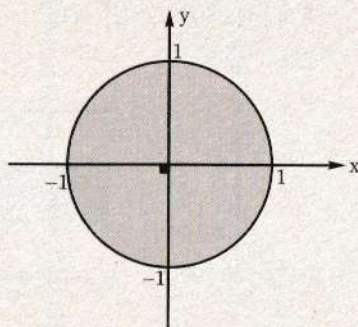
Rpta.: D

Resolución 2: Graficando cada relación:

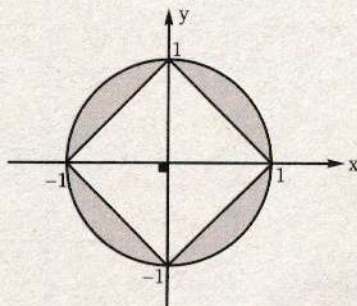
I. $|x| + |y| \geq 1$



II. $x^2 + y^2 \leq 1$

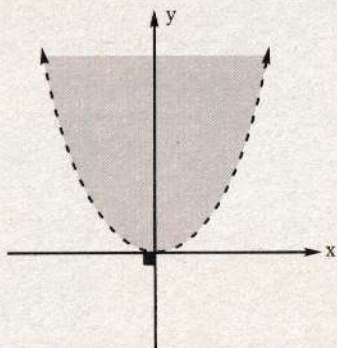


Finalmente la gráfica del sistema viene dada por $(I) \cap (II)$, veamos:



Rpta.: C

Resolución 3: La gráfica de $y > x^2$ es el semiplano ubicado por encima de la gráfica de la parábola $y = x^2$, no incluye la parábola

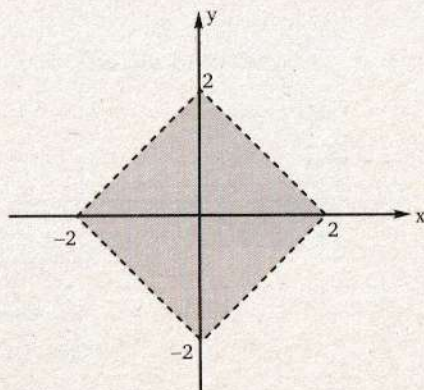


Rpta.: A

Resolución 4: Recordemos que: $|x| + |y| = a > 0$.
Corresponde a la gráfica de un cuadrado con centro en el origen de coordenadas y lado igual con $a\sqrt{2}$.

* $|x| + |y| < 2$:

Es la región limitada por el cuadrado $|x| + |y| = 2$, veamos:



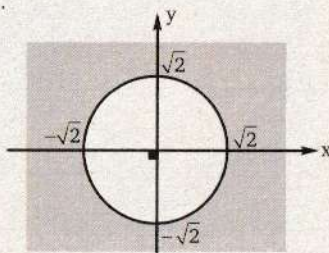
Rpta.: E

Resolución 5: Graficando cada relación:

I. $x^2 + y^2 \geq 2$

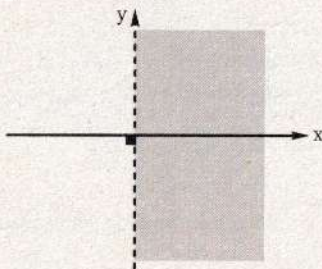
* $x^2 + y^2 = \sqrt{2}^2$:

corresponde a una circunferencia de radio igual $\sqrt{2}$ y centro en el origen de coordenadas.

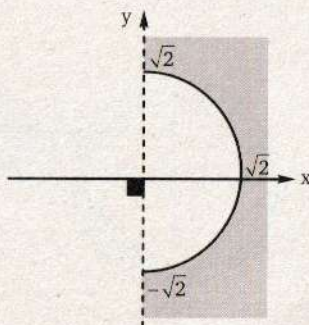


II. $x > 0$:

* $x = 0$: corresponde a una recta vertical, en este caso coincide con el eje de ordenadas.



Finalmente la gráfica del sistema viene dada por $(I) \cap (II)$, veamos:

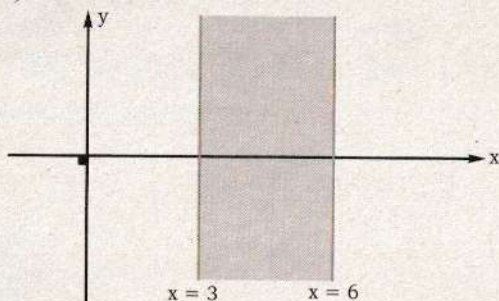


Rpta.: D

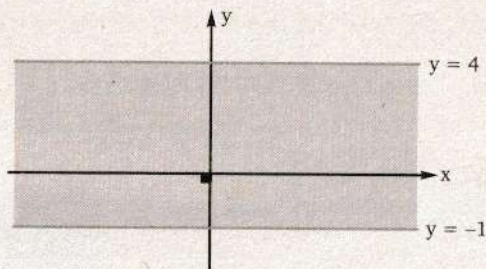
Resolución 6:

Graficando cada conjunto:

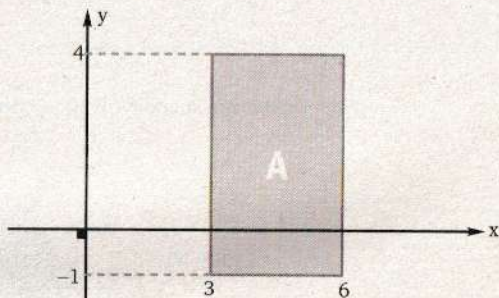
I. $A = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 6\}$



II. $B = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 4\}$



Ahora la gráfica de $A \times B$ viene dada por la intersección de las gráficas de A y B, veamos:



Finalmente hallemos el área A:

$$A = (3)(5)$$

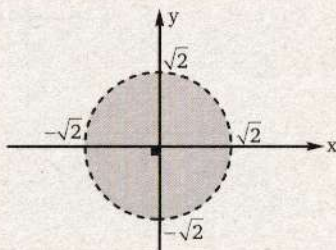
$$\therefore A = 15 \text{ u}^2$$

Rpta.: C

Resolución 7: Graficando cada uno de los conjuntos por separado.

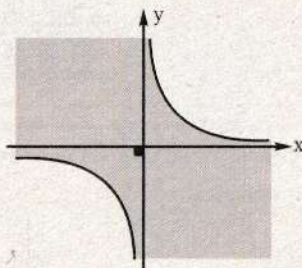
$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R} / x^2 + y^2 < 2\}$$

* $x^2 + y^2 = 2 = \sqrt{2}^2$: Corresponde a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio igual a $\sqrt{2}$. Ahora en la desigualdad:

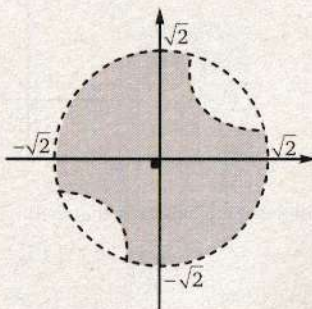


$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R} / xy < 1\}$$

* $xy = 1$: Corresponde a una hipérbola equilátera. Ahora en la desigualdad:



Finalmente la gráfica de $A \cap B$ viene dado por $A \cap B$:



Rpta.: C

Resolución 8:

Una rápida inspección permite reconocer las fórmulas de cada una de las relaciones graficadas.

$$F(x) = 2x^2 - 6x + 4 \quad (\text{se abre hacia arriba}).$$

$$H(x) = -x^2 - 2x + 8 \quad (\text{se abre hacia abajo}).$$

Ahora verticalmente tenemos:

$(x; H(x))$

d

$(x; F(x))$

$$\begin{aligned} * \quad d &= H(x) - F(x) = -x^2 - 2x + 8 - 2x^2 + 6x - 4 \\ d(x) &= -3x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

Para determinar la máxima distancia d procedemos a completar cuadrados; veamos:

$$d(x) = \frac{16}{3} - 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$$

Fácilmente podemos reconocer que $d(x)$ es máximo siempre que: $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$ sea mínimo; es decir:

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = 0.$$

$$[d(x)]_{\text{máximo}} = \frac{16}{3} - 3(0)$$

$$\Rightarrow d = \frac{16}{3} - 0$$

$$\therefore d = \frac{16}{3}$$

Rpta.: E

Resolución 9: La fórmula de la función se puede reescribir así:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x}; x \neq 0$$

I. Si $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x}{x} + \frac{x}{x}$$

$$f(x) = 1 + 1$$

$$f(x) = 2$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f_1) = \{2\}$$

II. Si $x < 0$:

$$f(x) = \frac{x}{-x} + \frac{-x}{x}$$

$$f(x) = -1 - 1$$

$$f(x) = -2$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f_2) = \{-2\}$$

Finalmente:

$$\text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2)$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \{-2; 2\}$$

Rpta.: B

Resolución 10: Por condición F es una función de proporcionalidad, luego su fórmula viene dada por:

$$F(x) = k \cdot x$$

Observa que:

$$F(4) = 4k$$

$$F(12) = 12k$$

Sumando tenemos: $F(4) + F(12) = 16k$

Dato

$$64 = 16k$$

$$4 = k$$

Ahora la función será:

$$F(x) = 4x$$

Finalmente tenemos:

$$E = F\left(\frac{3}{4}\right) + F\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$E = 4\left(\frac{3}{4}\right) + 4\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$E = 3 + 14$$

$$\therefore E = 17$$

Rpta.: E

Resolución 11: Por condición F es una función lineal, luego su fórmula viene dada por:

$$F(x) = ax + b$$

$$* F(1) = 7 \Rightarrow a + b = 7 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$* F(3) = 5 \Rightarrow 3a + b = 5 \quad \dots\dots\dots(2)$$

Efectuando (2) - (1):

$$3a - a = 5 - 7$$

$$2a = -2$$

$$a = -1$$

En (1) obtenemos: $-1 + b = 7$

$$b = 8$$

Ahora la fórmula de la función lineal será:

$$F(x) = -x + 8$$

Finalmente para: $x = 4$

$$F(4) = -4 + 8$$

$$\therefore F(4) = 4$$

Rpta.: B

Resolución 12: De acuerdo con la condición F es una función constante, luego según la teoría: $F(x) = K ; \forall x \in \mathbb{R} \quad \dots\dots\dots(1)$

Ahora en la igualdad propuesta:

$$\frac{F(n-1) + F(n+1)}{F(2n) - 3} = 5$$

Según la relación (1) tenemos:

$$\frac{K + K}{K - 3} = 5$$

$$2K = 5K - 15$$

$$15 = 3K$$

$$5 = K$$

La función constante es:

$$F(x) = 5 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

Finalmente tenemos:

$$F(n^2 - 1) + F(n^3 - 1) = 5 + 5$$

$$\therefore F(n^2 - 1) + F(n^3 - 1) = 10$$

Rpta.: D

Resolución 13: De acuerdo con la teoría se debe cumplir que:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{7x - x^2 - 12} \geq 0$$

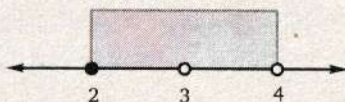
Multiplcando por -1 :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)(x-2)}{(x-4)(x-3)} \leq 0$$

Simplificando con $x \neq 3$:

$$\frac{x-2}{x-4} \leq 0$$



Observa que:

$$\text{Dom}(F) = [2; 4) - \{3\}$$

Por condición:

$$a = 2; b = 4 \wedge c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 9$$

Rpta.: E

Resolución 14: La fórmula de la función viene dada por:

$$F(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$$

$$F(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+3)}$$

Simplificando: $F(x) = \frac{x-2}{x+3}; x \neq -2$

Fácilmente reconocemos que:

$$\text{Dom}(F) = \mathbb{R} - \{-3; -2\}$$

Halleemos el rango de F :

$$y = \frac{x-2}{x+3}; x \neq -2$$

$$xy + 3y = x - 2; x \neq -2$$

$$xy - x = -3y - 2; x \neq -2$$

$$(y - 1)x = -3y - 2; x \neq -2$$

$$x = \frac{-3y - 2}{y - 1}; x \neq -2$$

Como $x \in \mathbb{R} : y - 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow y \neq 1, \text{asimismo } y \neq 4$$

De aquí podemos decir que:

$$\text{Ran}(F) = \mathbb{R} - \{-4; 1\}$$

Por condición: $A = \mathbb{R} - \{-3; -2\} = \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle -3; -2 \rangle \cup \langle -2; \infty \rangle$

$$B = \mathbb{R} - \{1; -4\} = \langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle -4; 1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$$

Finalmente: $\therefore A - B = \{-4; 1\}$

Rpta.: B

Resolución 15: La función es:

$$F = \{(8; 2), (2; a), (a^2 - 1; b), (2; 2a - 3), (3; 5)\}$$

De acuerdo con la teoría se cumple que:

$$2a - 3 = a \Rightarrow a = 3$$

Ahora la función se puede reescribir así:

$$F = \{(8; 2), (2; 3), (8; b), (3; 5)\}$$

De acuerdo con la teoría: $b = 2$

$$F = \{(8; 2), (2; 3), (3; 5)\}$$

Ahora reconocemos que:

$$\underbrace{F(8) = 2}_{\text{mínimo}} \quad \underbrace{F(3) = 5}_{\text{máximo}}$$

$$\therefore F(8) + F(3) = 7$$

Rpta.: C

Resolución 16: La fórmula de la función se puede reescribir así:

$$y = -3 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

$$y = -3 + \sqrt{(x-2)^2 + 1}$$

Ahora procedemos a formar el intervalo de y a partir del dominio.

$$-2 \leq x < 6$$

$$-4 \leq x - 2 < 4$$

$$0 \leq (x-2)^2 < 16$$

$$1 \leq (x-2)^2 + 1 < 17$$

$$1 \leq \sqrt{(x-2)^2 + 1} < \sqrt{17}$$

$$-3 + 1 \leq -3 + \sqrt{(x-2)^2 + 1} < -3 + \sqrt{17}$$

$$-2 \leq y < \sqrt{17} - 3$$

$$\Rightarrow y \in [-2; \sqrt{17} - 3)$$

$$\therefore \text{Ran}(F) = [-2; \sqrt{17} - 3)$$

Rpta.: A

Resolución 17: La fórmula de la función se puede reescribir así:

$$y = -\left(2 + \frac{1}{x+3}\right)$$

Ahora construiremos el intervalo de y a partir del dominio.

$$I. x \in \langle -\infty; -3 \rangle \Leftrightarrow -\infty < x < -3$$

$$-\infty < x + 3 < 0$$

$$-\infty < \frac{1}{x+3} < 0$$

$$-\infty < 2 + \frac{1}{x+3} < 2$$

$$2 < -\left(2 + \frac{1}{x+3}\right) < \infty$$

$$\Rightarrow y \in \langle -2; \infty \rangle$$

$$\text{II. } x \in \langle -3; 1 \rangle \Leftrightarrow -3 < x < 1$$

$$0 < x + 3 < 4$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{x+3} < \infty$$

$$\frac{9}{4} < 2 + \frac{1}{x+3} < \infty$$

$$-\infty < -\left(2 + \frac{1}{x+3}\right) < -\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow y \in \left\langle -\infty; -\frac{9}{4} \right\rangle$$

Finalmente:

$$y \in \left\langle -\infty; -\frac{9}{4} \right\rangle \cup \langle -2; \infty \rangle$$

$$\therefore \text{Ran}(F) = \left\langle -\infty; -\frac{9}{4} \right\rangle \cup \langle -2; \infty \rangle$$

Rpta.: A

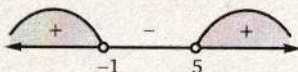
Resolución 18:

Para cada conjunto tenemos:

$$\text{A. } F(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 15 > 0$$



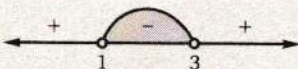
$$(3x + 3)(x - 5) > 0$$



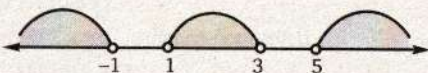
$$\text{B. } G(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 > 0$$

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$(x - 1)(x - 3) < 0$$



Graficando $A \cup B$:



$$\therefore (A \cup B)' = [-1; 1] \cup [3; 5]$$

Rpta.: B

Resolución 19: Por existencia de la expresión $f(x)$ en $\mathbb{R}$, se cumple que:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{\sqrt{21 - \sqrt{x^2 - 4}}} \geq 0$$

En forma equivalente:

$$\sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq 0 \wedge \sqrt{21 - \sqrt{x^2 - 4}} > 0$$

$$\sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq 0 \wedge -\sqrt{x^2 - 4} > -\sqrt{21}$$

$$\sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 - 4} < \sqrt{21}$$

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \wedge (x^2 - 4 \geq 0 \wedge x^2 - 4 < 21)$$

$$(x - 4)(x + 1) \geq 0 \wedge (x^2 \geq 4 \wedge x^2 < 25)$$

$$(x - 4)(x + 1) \geq 0 \wedge 4 \leq x^2 < 25$$

$$(x - 4)(x + 1) \geq 0 \wedge 2 \leq |x| < 5$$

$$(x \leq -1 \vee x \geq 4) \wedge (-5 < x \leq -2 \vee 2 \leq x < 5)$$

En la intersección: $-5 < x \leq -2 \vee 4 \leq x < 5$

$$x \in \langle -5; -2 \rangle \cup [4; 5)$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = \langle -5; -2 \rangle \cup [4; 5)$$

Rpta.: A

Resolución 20: Fácilmente podemos reconocer que:

$$\text{sgn}(x - \sqrt{x}) \neq 1; \text{ luego se cumple que:}$$

$$\text{sgn}(x - \sqrt{x}) = 0 \vee \text{sgn}(x - \sqrt{x}) = -1$$

De donde tenemos: $x - \sqrt{x} = 0 \vee x - \sqrt{x} < 0$

Equivalentemente: $x - \sqrt{x} \leq 0$

$$x \leq \sqrt{x}$$

$$x \geq 0 \wedge x^2 \leq x$$

$$x \geq 0 \wedge x^2 - x \leq 0$$

$$x \geq 0 \wedge x(x - 1) \leq 0$$

$$(x \geq 0) \wedge (0 \leq x \leq 1)$$

De la intersección: $0 \leq x \leq 1$

$$x \in [0; 1]$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = [0; 1]$$

Rpta.: B

Resolución 21: Por condición de existencia se debe cumplir que:

$$x - \sqrt{x} \geq 0$$

Equivalentemente: $\sqrt{x} \leq x$

$$x \geq 0 \wedge x \leq x^2$$

$$x \geq 0 \wedge -x^2 + x \leq 0$$

$$x \geq 0 \wedge x^2 - x \geq 0$$

$$x \geq 0 \wedge x(x-1) \geq 0$$

$$\underbrace{x-1 \geq 0 \vee x=0}$$

$$x \geq 1 \vee x = 0$$

Ahora reconocemos que:

$$x \in [1; \infty) \cup \{0\}$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = [1; \infty) \cup \{0\}$$

Rpta.: E

Resolución 22: Redefiniendo la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{(x-1)}(x^2 + 2x - 2); & x-1 > 0 \\ \frac{x-1}{-(x-1)}(x^2 - 2x + 2); & x-1 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2; & x > 1 \\ -(x^2 - 2x + 2); & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 3; & x > 1 \dots\dots f_1 \\ -(x-1)^2 - 1; & x < 1 \dots\dots f_2 \end{cases}$$

* Formando f_1 :

$$1 < x < \infty$$

$$2 < x+1 < \infty$$

$$4 < (x+1)^2 < \infty$$

$$1 < (x+1)^2 - 3 < \infty$$

$$1 < f_1 < \infty$$

$$* \text{ Formando } f_2: \quad -\infty < x < 1$$

$$-\infty < x - 1 < 0$$

$$0 < (x - 1)^2 < \infty$$

$$-\infty < -(x - 1)^2 < 0$$

$$-\infty < -(x - 1)^2 - 1 < -1$$

$$-\infty < f_2 < -1$$

$$\text{Finalmente:} \quad \text{Ran}(f) = f_1 \cup f_2$$

$$\text{Ran}(f) = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \mathbb{R} - [-1; 1]$$

Rpta.: C

Resolución 23: Observa que si A es el dominio se requiere que:

$$\lfloor 1 - x \rfloor + 1 \neq 0$$

Como se pide A^C es necesario plantear que:

$$\lfloor 1 - x \rfloor + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$\lfloor 1 - x \rfloor = -1$$

$$\text{Por teorema:} \quad -1 \leq 1 - x < 0$$

$$\text{Sumando } -1: \quad -2 \leq -x < -1$$

Multiplicando por -1 :

$$1 < x \leq 2$$

$$\text{Observa que:} \quad x \in \langle 1; 2 \rangle$$

$$\therefore A^C = \langle 1; 2 \rangle$$

Rpta.: C

Resolución 24: La fórmula de la función es:

$$y = \frac{x}{x^2 + 2}; x \in \mathbb{R}$$

$$yx^2 + 2y = x$$

$$yx^2 - x + 2y = 0$$

Como $x \in \mathbb{R}$, la ecuación cuadrática anterior verifica que:

$$\Delta \geq 0$$

$$(-1)^2 - 4(y)(2y) \geq 0$$

$$1 - 8y^2 \geq 0$$

$$8y^2 - 1 \leq 0$$

Equivalentemente: $(\sqrt{8}y + 1)(\sqrt{8}y - 1) \leq 0$

$$-1 \leq \sqrt{8}y \leq 1$$

$$-\frac{1}{\sqrt{8}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Observa que:

$$y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right]$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right]$$

Rpta.: E

Resolución 25: De la fórmula de la función tenemos:

$$y = \frac{x}{x^2 + 4}; x \in \mathbb{R}$$

$$yx^2 + 4y = x$$

$$yx^2 - x + 4y = 0 \dots\dots\dots(1)$$

Supongamos que estamos frente a una ecuación cuadrática de incógnita x .

Como $x \in \mathbb{R}$ es necesario que el discriminante de la cuadrática sea no negativo, es decir:

$$\Delta \geq 0.$$

$$\text{De (1):} \quad \Delta = (-1)^2 - 4(y)(4y) \geq 0$$

$$1 - 16y^2 \geq 0$$

$$16y^2 - 1 \leq 0$$

$$(4y + 1)(4y - 1) \leq 0$$

En forma equivalente: $-\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}$

$$y \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f) = \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$$

Por condición: $a = -\frac{1}{4} \wedge b = \frac{1}{4}$

$$\therefore a + b = 0$$

Rpta.: B

Resolución 26: Una rápida inspección a la fórmula de la función sugiere plantear la siguiente relación:

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{b}{x}}\right)^2 \geq 0; x, b > 0$$

Desarrollando el primer miembro:

$$x + \frac{b}{x} - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{b}{x}} \geq 0$$

$$x + \frac{b}{x} - 2\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$$x + \frac{b}{x} - 2\sqrt{b} \geq 0$$

$$x + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{b}$$

Según la fórmula: $y = f(x) = x + \frac{b}{x}$

Ahora: $y \geq 2\sqrt{b}$

$$y \in [2\sqrt{b}; \infty)$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = [2\sqrt{b}; \infty)$$

Rpta.: C

Resolución 27: Dando uso de la relación para transformar radicales simples a dobles, la fórmula de la función se puede reescribir así:

$$f(x) = \sqrt{(x-1) + (7-x)} + 2\sqrt{(x-1)(7-x)}$$

$$f(x) = \sqrt{6 + 2\sqrt{-x^2 + 8x - 7}}$$

$$f(x) = \sqrt{6 + 2\sqrt{9 - (x-4)^2}}$$

A continuación procedemos a formar el rango a partir del dominio, veamos:

$$1 \leq x \leq 7$$

$$-3 \leq x - 4 \leq 3$$

$$0 \leq (x-4)^2 \leq 9$$

$$-9 \leq -(x-4)^2 \leq 0$$

$$0 \leq 9 - (x-4)^2 \leq 9$$

$$0 \leq \sqrt{9 - (x-4)^2} \leq 3$$

$$0 \leq 2\sqrt{9 - (x-4)^2} \leq 6$$

$$6 \leq 6 + 2\sqrt{9 - (x-4)^2} \leq 12$$

$$\sqrt{6} \leq \sqrt{6 + 2\sqrt{9 - (x-4)^2}} \leq 12$$

Ahora tenemos: $\sqrt{6} \leq f(x) \leq \sqrt{12}$

$$\sqrt{6} \leq f(x) \leq 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f(x) \in [\sqrt{6}; 2\sqrt{3}]$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = [\sqrt{6}; 2\sqrt{3}]$$

Rpta.: E

Resolución 28: La fórmula de la función se puede reescribir así:

$$y = f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$$

Por condición: $\text{Ran}(f) = \langle 1; 3 \rangle$

En consecuencia: $y \in \langle 1; 3 \rangle$

$$1 < y \leq 3$$

Según la fórmula: $1 < 1 - \frac{3}{x+2} \leq 3$

Sumando - 1: $0 < -\frac{3}{x+2} \leq 2$

Por recíproco: $\frac{1}{2} \leq -\frac{x+2}{3} < \infty$

Multipliando por - 3:

$$-\infty < x+2 \leq -\frac{3}{2}$$

Sumando - 2: $-\infty < x \leq -\frac{7}{2}$

Ahora reconocemos que:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2} \right]$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = \left(-\infty; -\frac{7}{2} \right]$$

Rpta.: B

Resolución 29: Por existencia de la expresión $f(x)$ en $\mathbb{R}$, se cumple:

$$\lceil x \rceil - x \geq 0$$

$$\lceil x \rceil \geq x \quad \dots\dots\dots(1)$$

De acuerdo con la teoría se sabe que:

$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1; \forall x \in \mathbb{R}$$

Con un extremo: $0 \leq x - \lfloor x \rfloor$

$$\lfloor x \rfloor \leq x \quad \dots\dots\dots(2)$$

De (1) y (2) tenemos:

$$\lceil x \rceil = x$$

Finalmente en la función:

$$f(x) = \sqrt{\lceil x \rceil - x}$$

$$f(x) = \sqrt{x - x}$$

$$f(x) = \sqrt{0}$$

$$f(x) = 0$$

$$\therefore A = \text{Ran}(f) = \{0\}$$

Rpta.: D

Resolución 30: Redefiniendo la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ \left\lfloor \frac{1}{x^2 + 1} \right\rfloor x - \lfloor x \rfloor & ; x < 0 \vee x > 0 \end{cases}$$

$$* x > 0 \vee x < 0 \equiv x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Se plantea: $x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 1$

Equivalentemente: $1 < x^2 + 1 < \infty$

Por el recíproco: $0 < \frac{1}{x^2 + 1} < 1$

De esto último: $\left\lfloor \frac{1}{x^2 + 1} \right\rfloor = 0$

Ahora la función será:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \dots\dots\dots f_1 \\ -\lfloor x \rfloor & ; x < 0 \vee x > 0 \dots\dots f_2 \end{cases}$$

Fácilmente reconocemos que:

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$$

en consecuencia: $-\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$

Observa que: $\text{Ran}(f_1) = \{0\}$

$$\text{Ran}(f_2) = \mathbb{Z}$$

Como: $\text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2)$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \mathbb{Z}$$

Rpta.: C

Resolución 31: La función es: $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 15} - 3$

I. Hallemos el dominio:

$$x^2 - 8x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-3) \geq 0$$

De donde tenemos:

$$x \leq 3 \vee x \geq 5$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty; 3 \rangle \cup [5; \infty)$$

II. Hallemos el rango:

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 15} - 3$$

$$y = f(x) = \sqrt{(x-4)^2 - 1} - 3$$

Formaremos el rango a partir del dominio; veamos:

$$-\infty < x \leq 3 \vee 5 \leq x < \infty$$

$$-\infty < x - 4 \leq -1 \vee 1 \leq x - 4 < \infty$$

$$1 \leq (x-4)^2 < \infty \vee 1 \leq (x-4)^2 < \infty$$

Equivalentemente:

$$1 \leq (x-4)^2 < \infty$$

$$0 \leq (x-4)^2 - 1 \leq \infty$$

$$0 \leq \sqrt{(x-4)^2 - 1} < \infty$$

$$-3 \leq \sqrt{(x-4)^2 - 1} - 3 < \infty$$

$$-3 \leq y < \infty$$

$$\Rightarrow \text{Rango de } f = [-3; \infty)$$

Se pide:

$$A = \text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f)$$

$$A = (\langle -\infty; 3 \rangle \cup [5; \infty)) \cap [-3; \infty)$$

$$\therefore A = [-3; 3] \cup [5; \infty)$$

Rpta.: B

Resolución 32: Veamos cada afirmación:

I. $f = \{(|x|; |y|)/x = 2y; x \in \mathbb{R}\}$

Observa que el conjunto de pares ordenados $(|2y|; |y|)$ origina una función con dominio $|2y| \geq 0$

La afirmación es verdadera (V)

II. $g = \{(x^3|x|; x)/x \in \mathbb{R}\}$

Es evidente que g es una función; pues cada valor de x origina un valor distinto en $x^3|x|$.

La afirmación es falsa (F).

III. $h = \{(-|x|; x)/x \in \mathbb{R}\}$

Es evidente que h no es una función, por ejemplo:

Si $x = 1$ obtenemos el par $(-1; 1)$; asimismo

si $x = -1$ tenemos: $(-1; -1)$.

La afirmación es falsa (F).

$\therefore$ La combinación correcta es: VFF

Rpta.: D

Resolución 33: La función:

$$y = f(x) = \sqrt{-x\sqrt{4-x^2}}$$

Se cumple que:

$$-x\sqrt{4-x^2} \geq 0$$

De aquí tenemos:

$$\sqrt{4-x^2} \geq 0 \wedge -x \geq 0$$

$$4-x^2 \geq 0 \wedge x \leq 0$$

$$x^2 - 4 \leq 0 \wedge x \leq 0$$

$$(x+2)(x-2) \leq 0 \wedge x \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 2 \wedge x \leq 0$$

Equivalentemente: $-2 \leq x \leq 0$

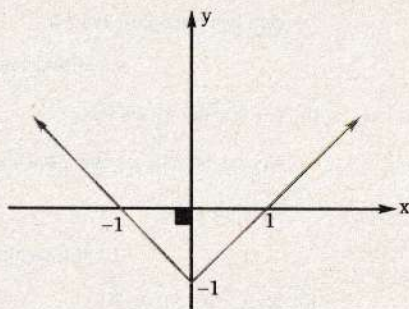
$$\therefore \text{Dom}(f) = [-2; 0]$$

Rpta.: D

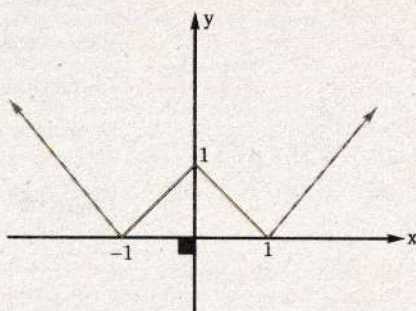
Resolución 34: Se pide la gráfica:

$$y = f(x) = ||x| - 1|$$

I. Graficando: $y = |x| - 1$



II. Graficando $y = f(x) = ||x| - 1|$ tenemos:



Rpta.: D

Resolución 35: Fácilmente podemos reconocer que $f(x)$ es creciente en el intervalo $[0; 9]$, luego se cumple que:

$$\text{Ran}(f) = [f(0); f(9)] = [2; 23]$$

$$M = \text{mayor elemento} = 23$$

$$m = \text{menor elemento} = 2$$

$$\therefore M + m = 25$$

Rpta.: E

Resolución 36: La función es:

$$y = f(x) = \frac{5x^2 - 7x - 6}{x + \frac{3}{5}}$$

$$y = f(x) = \frac{(5x+3)(x-2)}{x + \frac{3}{5}}$$

$$y = f(x) = \frac{\left(x + \frac{3}{5}\right)(5x-10)}{x + \frac{3}{5}}$$

Como $x \neq -\frac{3}{5}$ tenemos:

$$y = f(x) = 5x - 10$$

Por condición tenemos:

$$-\frac{3}{5} < x \leq \frac{3}{4}$$

$$-3 < 5x \leq \frac{15}{4}$$

$$-13 < 5x - 10 \leq -\frac{25}{4}$$

$$-13 < y \leq -\frac{25}{4}$$

Finalmente tenemos: $\frac{25}{4} \leq |y| < 13$

$$\therefore \text{Ran}(|f|) = \left[\frac{25}{4}; 13 \right)$$

Rpta.: D

Resolución 37: Por condición:

$$\text{Dom}(f) = \{a\} \cup [b; c)$$

La función es:

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+2}-3}$$

Se cumple que:

$$\begin{aligned} 7-x &\geq 0 \wedge x^2-4 \geq 0 \wedge x+2 \geq 0; x \neq 7 \\ x-7 &< 0 \wedge (x+2)(x-2) \geq 0 \wedge x+2 \geq 0 \\ (x < 7) &\wedge (x \leq -2 \vee x \geq 2) \wedge (x \geq -2) \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$2 \leq x < 7 \vee x = -2$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \{-2\} \cup [2; 7)$$

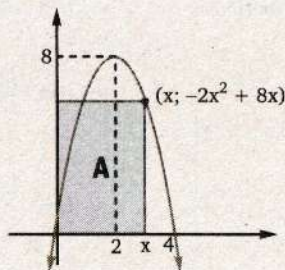
De donde tenemos:

$$a = -2; b = 2 \text{ y } c = 7$$

$$\therefore b - a + c = 11$$

Rpta.: C

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 10

Resolución 38: Del enunciado:

$$y = f(x) = -2x^2 + 8x$$

El área sombreada "A" viene dada por:

$$A(x) = (x)(-2x^2 + 8x) \dots\dots\dots(1)$$

$$A(x) = (x)(x)(-2x + 8)$$

Si $A(x)$ es el máximo:

$$x = x = -2x + 8$$

De donde obtenemos:

$$x = \frac{8}{3}$$

Como el valor de x debe ser entero:

$$x = 3 \Rightarrow y = f(3) = 6$$

Finalmente:

$$A = (3)(6)$$

$$\therefore A = 18 \text{ u}^2$$

Rpta.: D

Resolución 39: Del enunciado: $f(k)$ = función utilidad
 Se cumple que: $f(k) = (k - 50)(120 - k)$
 Observa que $f(k)$ es máximo si:

$$k - 50 = 120 - k$$

$$2k = 170$$

$$k = 85$$

$$\therefore \text{Precio de venta por unidad} = S/. 85$$

Rpta.: C

Resolución 40:

La función es:

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$$

I. Hallemos el dominio:

$$\frac{x-1}{x^2-4} \geq 0$$

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$$

II. Hallemos el rango:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$$

$$y \geq 0 \wedge y^2 = \frac{x-1}{x^2-4}$$

$$y \geq 0 \wedge y^2 \cdot x^2 - 4y^2 = x - 1$$

$$y \geq 0 \wedge \underbrace{y^2 \cdot x^2 - x + (1 - 4y^2)}_{*} = 0$$

* Cuadrática en x:

$$\Delta \geq 0, \text{ luego:}$$

$$y \geq 0 \wedge (-1)^2 - 4(y^2)(1 - 4y^2) \geq 0$$

$$y \geq 0 \wedge 1 - 4y^2 + 16y^4 \geq 0$$

Equivalentemente: $y \geq 0$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f) = [0; \infty)$$

Finalmente:

$$A = \text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f)$$

$$A = (\langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle) \cap ([0; \infty))$$

$$\therefore A = [0; 1] \cup \langle 2; \infty \rangle$$

Rpta.: C

Resolución 41: La función es: $y = f(x) = \sqrt{\frac{5x}{x+5}}$

I. Hallemos el dominio:

$$\frac{5x}{x+5} \geq 0$$

Equivalentemente:

$$x < -5 \vee x \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty; -5 \rangle \cup [0; \infty)$$

II. Hallemos el rango:

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{5x}{x+5}}$$

$$y = f(x) = \sqrt{5 - \frac{25}{x+5}}$$

formando a partir del dominio:

$$-\infty < x < -5 \vee 0 \leq x < \infty$$

$$-\infty < x+5 < 0 \vee 5 \leq x+5 < \infty$$

$$-\infty < \frac{1}{x+5} < 0 \vee 0 < \frac{1}{x+5} \leq \frac{1}{5}$$

$$0 < -\frac{25}{x+5} < \infty \vee -5 \leq -\frac{25}{x+5} < 0$$

$$5 < 5 - \frac{25}{x+5} < \infty \vee 0 \leq 5 - \frac{25}{x+5} < 5$$

$$\sqrt{5} < \sqrt{5 - \frac{25}{x+5}} < \infty \vee 0 \leq \sqrt{5 - \frac{25}{x+5}} < \sqrt{5}$$

$$\sqrt{5} < y < \infty \vee 0 \leq y < \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f) = [0; \infty) - \{\sqrt{5}\}$$

Finalmente:

$$A = \text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f)$$

$$A = (\langle -\infty; -5 \rangle \cup [0; \infty)) \cap ([0; \sqrt{5}) \cup \langle \sqrt{5}; \infty \rangle)$$

$$\therefore A = [0; \sqrt{5}) \cup \langle \sqrt{5}; \infty \rangle = [0; \infty) - \{\sqrt{5}\}$$

Rpta.: D

- Resolución 42:** La función es: $y = f(x) = \sqrt{2 - x^2} - x^2$
- Observa que: $f(x) = f(-x)$; luego f es par con dominio igual a:
- $$\text{Dom}(f) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$
- A sí mismo: $\text{Ran}(f) = [f(-\sqrt{2}); f(0)]$
- $$\text{Ran}(f) = [-2; \sqrt{2}]$$
- I. $\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cap [-2; \sqrt{2}]$
- $$\Rightarrow \text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$
- El enunciado es falso (F).
- II. $\exists x_1; x_2 \in \text{Dom}(f) / f(x_1) = f(x_2)$ por ejemplo:
- $$\left. \begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \end{array} \right\} f(x_1) = f(x_2) = -2$$
- El enunciado es verdadero (V).
- III. $\text{Ran}(f) - \text{Dom}(f) = [-2; \sqrt{2}] - [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
- $$\Rightarrow \text{Ran}(f) - \text{Dom}(f) = [-2; -\sqrt{2})$$
- El enunciado es falso (F).
- $\therefore$ La combinación correcta es: FVF

Rpta.: D

- Resolución 43:** La función es:
- $$y = f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}; x > 1$$
- $$y = f(x) = \frac{x(x - 1) + 4}{x - 1}; (x - 1) > 0$$
- $$y = f(x) = x + \frac{4}{x - 1}; (x - 1) > 0$$
- $$y = f(x) = (x - 1) + \frac{4}{(x - 1)} + 1; (x - 1) > 0$$
- Se sabe que si:
- $$(x - 1) > 0 \Rightarrow (x - 1) + \frac{4}{(x - 1)} \geq 2\sqrt{4}$$
- $$(x - 1) + \frac{4}{(x - 1)} \geq 4$$

$$(x-1) + \frac{4}{(x-1)} + 1 \geq 4 + 1$$

$$y = f(x) \geq 5$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = [5; \infty)$$

Rpta.: C

Resolución 44:

La función es:

$$y = f(x) = \frac{x+4}{x-a}$$

* Asíntota vertical: $x - a = 0 \rightarrow x = a$

De la gráfica tenemos:

$$a = 3$$

Ahora en la fórmula de f:

$$y = f(x) = \frac{x+4}{x-3}$$

Despejando x de la fórmula:

$$x = f(y) = \frac{3y+4}{y-1}$$

* Asíntota horizontal:

$$y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$$

En la gráfica tenemos: $b = 1$

* Hallemos "c": $y = \frac{x+4}{x-3}$

$$0 = \frac{x+4}{x-3} \Rightarrow x = -4$$

$$\Rightarrow c = -4$$

* Hallemos "d": $y = \frac{x+4}{x-3}$

$$y = \frac{0+4}{0-3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow d = \frac{4}{3}$$

Finalmente:

$$a + b + c + d = 3 + 1 - 4 - \frac{4}{3}$$

$$\therefore a + b + c + d = -\frac{4}{3}$$

Rpta.: A

Resolución 45: La función es: $y = f(x) = \left\lfloor \frac{20}{x^{2010} + 1} \right\rfloor$

Se plantea: $x^{2010} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$x^{2010} + 1 \geq 1$$

Equivalentemente: $1 \leq x^{2010} + 1 < \infty$

$$0 < \frac{1}{x^{2010} + 1} \leq 1$$

$$0 < \frac{20}{x^{2010} + 1} \leq 20$$

De donde reconocemos que:

$$y = \left\lfloor \frac{20}{x^{2010} + 1} \right\rfloor = 0; 1; 2; 3; \dots; 20$$

$$\Rightarrow \Sigma \text{ elementos} = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 20$$

$$\therefore \Sigma \text{ elementos} = 210$$

Rpta.: C

Resolución 46: Hallemos la fórmula de la gráfica de la función que corresponde al dominio $[1; 3]$. Sea la fórmula:

$$f(x) = ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} * f(1) = 5 \Rightarrow a + b = 5 \\ * f(3) = 11 \Rightarrow 3a + b = 11 \end{array} \right\} a = 3 \wedge b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x + 2$$

Ahora tenemos: $y = f(x) = \begin{cases} 5; & x < 1 \\ 3x + 2; & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Finalmente: $E = f(2) - f(-2)$

$$E = 8 - (-5)$$

$$\therefore E = 3$$

Rpta.: D

Resolución 47: Se cumple que: $(\lfloor 1-x \rfloor + 1 \neq 0) \in A$
 $\Rightarrow (\lfloor 1-x \rfloor + 1 = 0) \in A^C$

Por tanto se cumple que:

$$\lfloor 1-x \rfloor + 1 = 0$$

$$\lfloor 1-x \rfloor = -1$$

Por teorema se plantea:

$$-1 \leq 1-x < 0$$

$$-2 \leq -x < -1$$

$$1 < x \leq 2$$

$$\therefore x \in (1; 2]$$

Rpta.: D

Resolución 48: De acuerdo con la gráfica, la función tiene la siguiente fórmula:

$$f(x) = a(x-2)^2 + 3$$

Condición: $f(-1) = 0$

En la fórmula: $0 = a(-1-2)^2 + 3$

$$0 = 9a + 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Ahora tenemos: $f(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 3$

Finalmente: $f(3) = -\frac{1}{3}(3-2)^2 + 3$

$$f(3) = -\frac{1}{3} + 3$$

$$\therefore f(3) = \frac{8}{3}$$

Rpta.: B

Resolución 49: La función es:

$$y = f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}$$

Se cumple que: $x - \lfloor x \rfloor > 0$

Se sabe que: $x > \lfloor x \rfloor; \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

$$x - \lfloor x \rfloor > 0; \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

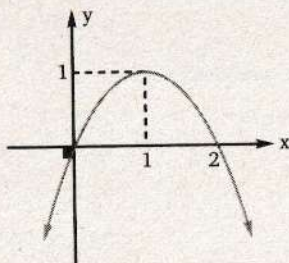
Rpta.: C

Resolución 50:

La función es:

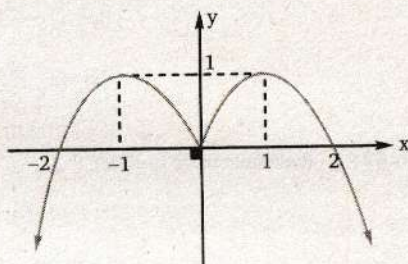
$$y = f(x) = 2x - x^2$$

$$y = f(x) = 1 - (x - 1)^2$$



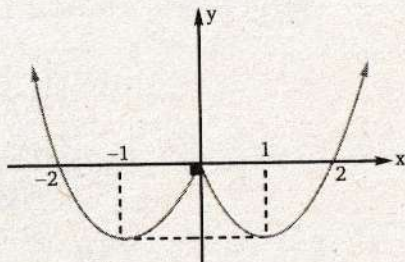
I. Graficando: $y = f(|x|)$

$$\text{Sea } y = f(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x); & x \geq 0 \\ f(-x); & x < 0 \end{cases}$$



II. Graficando: $y = -f(|x|)$

De acuerdo con el caso anterior se pide la gráfica de $-f(x)$ que fácilmente podemos obtener a partir de la gráfica de $f(x)$, veamos:



Finalmente como: $g(x) = \max\{f(|x|); -f(|x|)\}$

$$\therefore g(x) = |f(|x|)|$$

Rpta.: C

Resolución 51: La función es:

$$y = f(x) = \left\lfloor \frac{x^2 - 2x - 1}{2} \right\rfloor$$

$$y = f(x) = \left\lfloor \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 \right\rfloor$$

Por condición tenemos:

$$-1 \leq x \leq 3$$

$$-2 \leq x - 1 \leq 2$$

$$0 \leq (x-1)^2 \leq 4$$

$$0 \leq \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq 2$$

$$-1 \leq \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow y = \left\lfloor \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 \right\rfloor = -1; 0; 1$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \{-1; 0; 1\}$$

Rpta.: C**Resolución 52:** Redefiniendo la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2; \sqrt{1 - \lfloor x \rfloor^2} > 0 \\ 0; \sqrt{1 - \lfloor x \rfloor^2} = 0 \\ -x^2; \sqrt{1 - \lfloor x \rfloor^2} < 0 \end{cases}$$

Fácilmente podemos reconocer que el último caso es imposible dentro del conjunto $\mathbb{R}$, razón por la cual nuestra función queda así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2; 1 - \lfloor x \rfloor^2 > 0 \\ 0; 1 - \lfloor x \rfloor^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2; -1 < \lfloor x \rfloor < 1 \\ 0; \lfloor x \rfloor = 1 \vee \lfloor x \rfloor = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2; 0 \leq x < 1 \\ 0; -1 \leq x < 0 \vee 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$* \text{ Si } 0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = [0; 1)$$

Rpta.: D

Resolución 53: Redefiniendo la función:

$$f(x) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor; \frac{\sqrt{1-x^2}|x|}{x^2-1} > 0 & \dots\dots f_1 \\ 0; \frac{\sqrt{1-x^2}|x|}{x^2-1} = 0 & \dots\dots f_2 \\ -\left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor; \frac{\sqrt{1-x^2}|x|}{x^2-1} < 0 & \dots\dots f_3 \end{cases}$$

* Para f_1 tenemos: $1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2-1 > 0$

$$-1 < x < 1$$

Pero $x \neq 0$; luego: $-1 < x < 0 \vee 0 < x < 1$

$$0 < -x < 1 \vee -1 < -x < 0$$

$$2 < 2-x < 3 \vee 1 < 2-x < 2$$

$$1 < \frac{2-x}{2} < \frac{3}{2} \vee \frac{1}{2} < \frac{2-x}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor = 1 \vee \left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor = 0$$

Se observa que: $\text{Ran}(f_1) = \{0; 1\}$

* Para f_2 tenemos: $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

Se observa que: $\text{Ran}(f_2) = \{0\}$

* Para f_3 tenemos: $x^2-1 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Pero $x \neq 0$; luego: $-1 < x < 0 \vee 0 < x < 1$

$$0 < -x < 1 \vee -1 < -x < 0$$

$$2 < 2-x < 3 \vee 1 < 2-x < 2$$

$$1 < \frac{2-x}{2} < \frac{3}{2} \vee \frac{1}{2} < \frac{2-x}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor = 1 \vee \left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor = 0$$

$$\Rightarrow -\left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor = -1 \vee -\left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor = 0$$

Se observa que: $\text{Ran}(f_3) = \{-1; 0\}$

Finalmente: $\text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2) \cup \text{Ran}(f_3)$

$$\text{Ran}(f) = \{0; 1\} \cup \{0\} \cup \{-1; 0\}$$

$$\text{Ran}(f) = \{-1; 0; 1\}$$

$$\therefore \Sigma \text{ elementos} = 0$$

Rpta.: B

Resolución 54: $f(x) = (\alpha - 7)x^2 + \frac{1}{2}(\beta - \alpha - 4)x + 2\alpha - \beta - 2$; $x \in \mathbb{R}$

I. Si $f(x)$ es función lineal:

$$\alpha - 7 = 0$$

$$\alpha = 7$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(\beta - 11)x + 12 - \beta$$

Observa que $f(x)$ es una función lineal para cualquier $\beta \neq 11$.

Por tanto: $\alpha\beta$ no necesariamente es 84.

El enunciado es falso (F).

II. Si $f(x)$ es constante:

$$\alpha - 7 = 0 \wedge \beta - \alpha - 4 = 0$$

$$\alpha = 7 \wedge \beta - 7 - 4 = 0$$

$$\alpha = 7 \wedge \beta = 11$$

Observa que: $\alpha\beta = 77$

El enunciado es verdadero (V).

III. Si $f(x)$ es la función identidad:

$$\alpha - 7 = 0 \wedge \beta - \alpha - 4 = 2 \wedge 2\alpha - \beta - 2 = 0$$

$$\alpha = 7 \wedge \beta - 7 - 4 = 2 \wedge 14 - \beta - 2 = 0$$

$$\alpha = 7 \wedge \beta = 13 \wedge \beta = 12$$

Absurdo

El enunciado es falso (F).

$\therefore$ Combinación correcta = FVE

Rpta.: B

Resolución 55: Para la función escalón unitario:

$$u(x + \pi) = \begin{cases} 1 & ; x \geq -\pi \\ 0 & ; x < -\pi \end{cases}$$

$$u(x - \pi) = \begin{cases} 1 & ; x \geq \pi \\ 0 & ; x < \pi \end{cases}$$

Ahora para la función h tenemos:

$$h(x) = u(x + \pi) - u(x - \pi) = \begin{cases} 0; & x \geq \pi \\ 1; & -\pi \leq x < \pi \\ 0; & x < -\pi \end{cases}$$

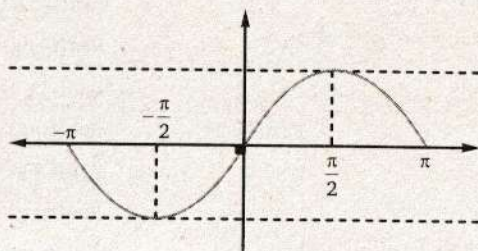
Como:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x); \text{ donde : } g(x) = \sin(x)$$

Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \geq \pi \\ \sin(x); & -\pi \leq x < \pi \\ 0; & x < -\pi \end{cases}$$

Graficando tenemos:



$$\therefore f \text{ es creciente en } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Rpta.: D

Resolución 56: Hallemos $\text{Dom}(f + g)$:

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$\text{Dom}(f + g) = \langle -2; 5 \rangle \cap \{1; 2; 3; 7; 0\}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f + g) = \{1; 2; 3; 0\}$$

Ahora hallamos los elementos del rango de $f + g$:

$$\bullet y = f(1) + g(1) = 5 + 3 = 8$$

$$\bullet y = f(2) + g(2) = 7 + 7 = 14$$

$$\bullet y = f(3) + g(3) = 9 + 9 = 18$$

$$\bullet y = f(0) + g(0) = 3 + 10 = 13$$

$\therefore$ El número de elementos del rango es 4

Rpta.: D

Resolución 57:

Se tiene:

$$f(x) = \begin{cases} x+1; -2 \leq x < 5 & \dots\dots f_1 \\ x^2 - 10; 5 \leq x \leq 10 & \dots\dots f_2 \end{cases}$$

$$g = \{(2; 3), (-5; 4), (0; 2), (8; 20), (12; 9)\}$$

$$* f_1 + g : \text{Dominio} = \{0; 2\}$$

$$\text{Ran}(f_1 + g) = \{f_1(0) + g(0); f_1(2) + g(2)\}$$

$$\text{Ran}(f_1 + g) = \{1 + 2; 3 + 3\}$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f_1 + g) = \{3; 6\}$$

$$* f_2 + g : \text{Dominio} = \{8\}$$

$$\text{Ran}(f_2 + g) = \{f_2(8) + g(8)\}$$

$$\text{Ran}(f_2 + g) = \{54 + 20\}$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f_2 + g) = \{74\}$$

Finalmente:

$$\text{Ran}(f + g) = \text{Ran}(f_1 + g) \cup \text{Ran}(f_2 + g)$$

$$\text{Ran}(f + g) = \{3; 6\} \cup \{74\}$$

$$\text{Ran}(f + g) = \{3; 6; 74\}$$

$$\therefore \Sigma \text{ elementos} = 83$$

Rpta.: E**Resolución 58:**Las funciones son: $f(x) = 2x$; $g(x) = 2x + 1$; $h(x) = x^3$ En cada afirmación: I. $g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 2x$

$$1 \geq 0; \forall x \in (0; 1)$$

La afirmación es verdadera (V).

$$\text{II. } g(x) \geq h(x) \geq f(x) \Leftrightarrow 2x + 1 \geq x^3 \geq 2x$$

$$\text{¡No cumple si } x = 1!$$

La afirmación es falsa (F).

$$\text{III. } h(x) \geq g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow x^3 \geq 2x + 1 \geq 2x;$$

$$\forall x \in (2; \infty)$$

La afirmación es verdadera (V).

 $\therefore$ La combinación correcta es: VFV**Rpta.: D**

Resolución 59: Se busca la fórmula de $f + g$ en el dominio: $x \in \langle -1; 0 \rangle$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 3; & x < 0 \quad \dots\dots f_1 \\ 3; & x \geq 0 \quad \dots\dots f_2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3; & x < -3 \quad \dots\dots g_1 \\ -x; & -3 \leq x < -1 \quad \dots\dots g_2 \\ \frac{x+3}{2}; & x \geq -1 \quad \dots\dots g_3 \end{cases}$$

Fácilmente podemos reconocer que la fórmula buscada se obtiene al efectuar $f_1 + g_3$; veamos:

$$(f_1 + g_3)(x) = f_1(x) + g_3(x); \quad -1 < x < 0$$

$$(f_1 + g_3)(x) = \frac{x}{2} + 3 + \frac{x+3}{2}; \quad -1 < x < 0$$

$$\therefore (f + g)(x) = \frac{2x+9}{2}; \quad x \in \langle -1; 0 \rangle$$

Rpta.: A

Resolución 60: Se tiene:

$$f = \{(2; 4), (3; 9), (8; 0)\}$$

$$g = \{(1; 8), (2; 8), (3; 8)\}$$

$$h(x) = \begin{cases} x+1; & x < 2 \\ 9\sqrt{x-2}; & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \frac{h}{f} = \left\{ \left(2; \frac{h(2)}{f(2)} \right), \left(3; \frac{h(3)}{f(3)} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{f} = \{(2; 0), (3; 1)\}$$

$$\bullet \quad g - \frac{h}{f} = \{(2; 8-0), (3; 8-1)\}$$

$$\Rightarrow g - \frac{h}{f} = \{(2; 8), (3; 7)\}$$

Observa que:

$$\text{Ran} \left(g - \frac{h}{f} \right) = \{8; 7\}$$

$$\therefore \Sigma \text{ elementos} = 15$$

Rpta.: B

Resolución 61: De la condición: $f = \{(-1; 2), (2; 2), (3; 4), (4; 3), (6; 3)\}$

$$g(x) = \begin{cases} -x + 4; & -4 < x < -1 \\ x + 3; & -1 \leq x < 3 \\ -x + 7; & 3 \leq x < 6 \end{cases}$$

$$h(x) = 2f(x) + g(x); \quad \forall x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

- $h(-1) = 2f(-1) + g(-1) = 2(2) + (2) = 6$
- $h(2) = 2f(2) + g(2) = 2(2) + (5) = 9$
- $h(3) = 2f(3) + g(3) = 2(4) + (4) = 12$
- $h(4) = 2f(4) + g(4) = 2(3) + (3) = 9$

Observa que: $\forall x \in \{-1; 2; 3; 4\}, h(x) > 0$

$$\therefore \Sigma \text{ elementos} = -1 + 2 + 3 + 4 = 8$$

Rpta.: E

Resolución 62: Se busca la fórmula de $((f \cdot g) \cdot h)$ en $x \in \langle 3; 4 \rangle$.

Las funciones dadas son:

$$f(x) = \begin{cases} |x|; & -1 \leq x < 3 \quad \dots\dots\dots f_1 \\ -2x + 3; & 3 < x \leq 6 \quad \dots\dots\dots f_2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}; & 1 \leq x < 4 \\ \lfloor x \rfloor; & 5 \leq x < 7 \end{cases}$$

$$h(x) = \sqrt[3]{x}; \quad x \in \mathbb{R}$$

- Hallemos $f \cdot g$ en $x \in \langle 3; 4 \rangle$

$$\Rightarrow (f \cdot g)(x) = (-2x + 3)\sqrt{x-1}; \quad 3 < x < 4$$

- Hallemos $(f \cdot g) \cdot h$ en $x \in \langle 3; 4 \rangle$

$$\therefore (f \cdot g) \cdot h = (-2x + 3)\sqrt{x-1} \cdot \sqrt[3]{x}$$

Rpta.: A

Resolución 63: Se busca la fórmula de $\frac{f}{g}$ en $x \in [0; 5)$ las funciones son:

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 2; & x < -3 \quad \dots\dots\dots f_1 \\ 5; & -3 \leq x < 5 \quad \dots\dots\dots f_2 \\ \lfloor x \rfloor; & x \geq 5 \quad \dots\dots\dots f_3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2}; & x < 0 \dots\dots g_1 \\ x^2 + 1; & x \geq 0 \dots\dots g_2 \end{cases}$$

Fácilmente podemos reconocer que la fórmula se obtiene con f_2 y g_2 , veamos:

$$\therefore \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{5}{x^2 + 1}; \quad x \in [0; 5)$$

Rpta.: A

Resolución 64: Las funciones son: $f(x) = \lfloor x \rfloor; \quad x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} - 1; & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ es impar} \\ |x| - \lfloor x \rfloor; & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ es par} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -1; & -1 < x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & 0 < x < 1 \end{cases}$$

- Hallando $g \cdot h$:

$$(g \cdot h)(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}; & -1 < x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ |x| - \lfloor x \rfloor; & 0 < x < 1 \end{cases}$$

- Hallando $f + gh$:

$$(f + g \cdot h)(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}; & -1 < x < 0 \\ \lfloor x \rfloor; & x = 0 \\ |x|; & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Redefiniendo la función, según su dominio:

$$(f + g \cdot h)(x) = \begin{cases} -1 + 1 - \sqrt{x - (-1)}; & -1 < x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ x; & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$(f + g \cdot h)(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+1}; & -1 < x < 0 \dots\dots(I) \\ 0; & x = 0 \dots\dots(II) \\ x; & 0 < x < 1 \dots\dots(III) \end{cases}$$

$$\text{En (I): } -1 < x < 0 \Leftrightarrow 0 < x+1 < 1$$

$$0 < \sqrt{x+1} < 1$$

$$-1 < -\sqrt{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow \text{Ran(I)} = \langle -1; 0 \rangle$$

$$\text{En(II): } x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ran(II)} = \{0\}$$

$$\text{En(III): } 0 < x < 1 \rightarrow 0 < y < 1$$

$$\Rightarrow \text{Ran(III)} = \langle 0; 1 \rangle$$

Finalmente el rango de $f + g$ viene dado por la unión de los rangos encontrados.

$$\therefore \text{Ran}(f + g, h) = \langle -1; 1 \rangle$$

Rpta.: A

Resolución 65:

Las funciones son:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8 - \lfloor x^2 \rfloor}}; \quad g(x) = \text{sgn}(\sqrt{x-2})$$

I. Hallemos Dom(f):

$$8 - \lfloor x^2 \rfloor > 0$$

$$\lfloor x^2 \rfloor < 8$$

$$x^2 < 8$$

$$-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$$

$$-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$$

II. Redefiniendo las funciones:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8 - \lfloor x^2 \rfloor}}; \quad -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0; & \sqrt{x-2} = 0 \\ 1; & \sqrt{x-2} > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0; & x = 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{III. Hallemos } f \cdot g: \quad (f \cdot g)(x) = \begin{cases} 0; & x = 2 \dots\dots\dots(I) \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8 - \lfloor x^2 \rfloor}}; & 2 < x < 2\sqrt{2} \dots\dots(II) \end{cases}$$

En (II) eliminaremos al máximo entero:

$$2 < x < 2\sqrt{2} \Rightarrow 4 < x^2 < 8$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8-x^2}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}; & 2 < x < \sqrt{5} \\ 1; & \sqrt{5} \leq x < \sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; & \sqrt{6} \leq x < \sqrt{7} \\ \sqrt{3}; & \sqrt{7} \leq x < \sqrt{8} \end{cases}$$

Ahora la función $f \cdot g$ viene dada por:

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 0; & x = 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}; & 2 < x < \sqrt{5} \\ 1; & \sqrt{5} \leq x < \sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; & \sqrt{6} \leq x < \sqrt{7} \\ \sqrt{3}; & \sqrt{7} \leq x < \sqrt{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f \cdot g) = \left\{ 0; 1; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} \right\}$$

Se pide:

$$E = (0)^2 + (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$E = 0 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + 3$$

$$E = 4 + \frac{9}{4}$$

$$\therefore E = \frac{25}{4}$$

Rpta.: B

Resolución 66:

Se tiene:

$$f(x) = x^2; \quad x \leq 0 \quad \dots\dots\dots(I)$$

$$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 9 \quad \dots\dots\dots(II)$$

En (I) reemplazamos x por $g(x)$:

$$f(g(x)) = g^2(x); \quad g(x) \leq 0$$

$$4x^2 - 12x + 9 = g^2(x)$$

$$g^2(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

$$g^2(x) = (2x - 3)^2$$

$$|g(x)| = |2x - 3|$$

Observa que: $2x - 3$; sobre $x \leq 0$; es negativo.

$$-g(x) = -(2x - 3)$$

$$\therefore g(x) = 2x - 3$$

Rpta.: B

Resolución 67: Las funciones son: $f(x) = x^2 + 2x$; $g(x) = 2x - m$, $m < 0$

I. Hallemos $f \circ g$: $f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x)$

$$f(g(x)) = (2x - m)^2 + 2(2x - m)$$

$$f(g(x)) = 4x^2 + (4 - 4m)x + m^2 - 2m$$

Haciendo $x = 2$: $f(g(2)) = 16 + 8 - 8m + m^2 - 2m$

$$f(g(2)) = m^2 - 10m + 24 \dots\dots\dots(I)$$

II. Hallemos $g \circ f$: $g(f(x)) = 2f(x) - m$

$$g(f(x)) = 2(x^2 + 2x) - m$$

$$g(f(x)) = 2x^2 + 4x - m$$

Haciendo $x = m - 2$:

$$g(f(m - 2)) = 2(m - 2)^2 + 4(m - 2) - m$$

$$g(f(m - 2)) = 2m^2 - 5m \dots\dots\dots(II)$$

Por condición (I) = (II):

$$m^2 - 10m + 24 = 2m^2 - 5m$$

$$m^2 + 5m - 24 = 0$$

$$(m + 8)(m - 3) = 0$$

Por condición $m < 0$:

$$m + 8 = 0$$

$$\therefore m = -8$$

Rpta.: B

Resolución 68: Se pide la gráfica de $g(x)$:

$$g(x) = |1 - f(4 - |x|)|$$

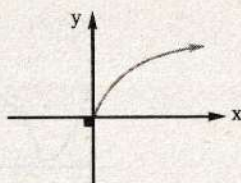
Reescribiendo la función:

$$g(x) = |f(4 - |x|) - 1|$$

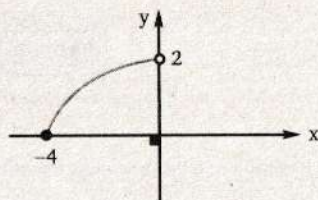
I. Redefiniendo la función:

$$f(4 - |x|) = \begin{cases} f(4 + x); & x < 0 \dots\dots f_1 \\ f(4 - x); & x \geq 0 \dots\dots f_2 \end{cases}$$

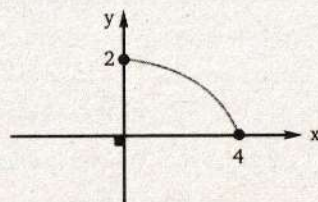
II. Gráfica dato: $f(x) = \sqrt{x}$



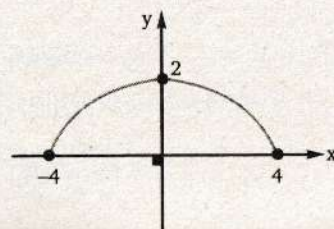
III. Graficando f_1 :



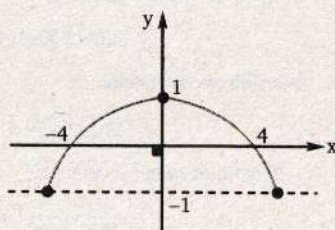
IV. Graficando f_2 :



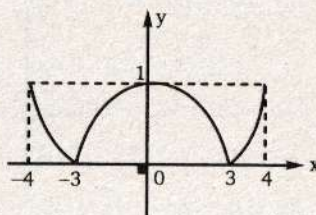
V. $y = f(4 - |x|)$



VI. $y = f(4 - |x|) - 1$



VII. $y = g(x) = |f(4 - |x|) - 1|$



Rpta.: B

Resolución 69: Redefiniendo las funciones tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}; & -1 \leq x < 0 \quad \dots\dots f_1 \\ \sqrt{1+x}; & 0 \leq x < 3 \quad \dots\dots f_2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < 1 \quad \dots\dots g_1 \\ x^2 - 1; & x \geq 1 \quad \dots\dots g_2 \end{cases}$$

I. Para $f_1 \circ g_1$: $\text{Dom}(f_1 \circ g_1) = x \in \text{Dom}(g_1) \wedge g_1(x) \in \text{Dom}(f_1)$

$$\text{Dom}(f_1 \circ g_1) = 0 < x < 1 \wedge 1 \in \underbrace{[-1; 0]}_{\emptyset}$$

$\Rightarrow$ No existe $f_1 \circ g_1$

II. Para $f_1 \circ g_2$: $\text{Dom}(f_1 \circ g_2) = x \in \text{Dom}(g_2) \wedge g_2(x) \in \text{Dom}(f_1)$

$$\text{Dom}(f_1 \circ g_2) = x \geq 1 \wedge -1 \leq x^2 - 1 < 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\text{Dom}(f_1 \circ g_2) = x \geq 1 \wedge 0 \leq x^2 < 1$$

$$\text{Dom}(f_1 \circ g_2) = x \geq 1 \wedge \underbrace{-1 \leq x < 1}_{\phi}$$

$\Rightarrow$ No existe $f_1 \circ g_2$

III. Para $f_2 \circ g_1$: $\text{Dom}(f_2 \circ g_1) = x \in \text{Dom}(g_1) \wedge g_1(x) \in \text{Dom}(f_2)$

$$\text{Dom}(f_2 \circ g_1) = 0 < x < 1 \wedge 1 \in [0; 3]$$

$$\text{Dom}(f_2 \circ g_1) = 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f_2 \circ g_1) = \langle 0; 1 \rangle$$

• Hallemos la fórmula $f_2 \circ g_1$:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\text{Como } f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{1+g(x)}$$

$$\text{Pero } g(x) = 1 \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{2}$$

IV. Para $f_2 \circ g_2$: $\text{Dom}(f_2 \circ g_2) = x \in \text{Dom}(g_2) \wedge g_2 \in \text{Dom}(f_2)$

$$\text{Dom}(f_2 \circ g_2) = x \geq 1 \wedge 0 \leq x^2 - 1 < 3$$

$$\text{Dom}(f_2 \circ g_2) = x \geq 1 \wedge 1 \leq x^2 < 4$$

$$\text{Dom}(f_2 \circ g_2) = x \geq 1 \wedge (-2 < x \leq -1 \vee 1 \leq x < 2)$$

$$\text{Dom}(f_2 \circ g_2) = 1 \leq x < 2$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f_2 \circ g_2) = [1; 2)$$

• Hallemos la fórmula de $f_2 \circ g_2$:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\text{Como: } f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{1+g(x)}$$

$$\text{Pero } g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{x^2}$$

$$\text{Recuerda que: } x \in [1; 2) \Rightarrow f(g(x)) = x$$

V. Redefiniendo la función:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \sqrt{2}; & 0 < x < 1 \\ x; & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Observa que: $\text{Dom}(f \circ g) = \langle 0; 2 \rangle$ y $\text{Ran}(f \circ g) = [1; 2)$

$$\therefore \text{Dom}(f \circ g) - \text{Ran}(f \circ g) = \langle 0; 1 \rangle$$

Rpta.: E

Resolución 70: Por condición: f es par y g es impar.

I. falso (F), por ejemplo si:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x \end{array} \right\} \begin{array}{l} (f+g)(x) = x^2 + x \\ \text{No es impar} \end{array}$$

II. verdadero (V): • $h(x) = (f \circ I^3)(x) = f(I^3(x)) = f(x^3)$

$$h(-x) = f(I^3(-x)) = f((-x)^3) = f(-x^3)$$

$$\text{Como } f(-x) = f(x) \Rightarrow f(-x^3) = f(x^3)$$

$$\text{Ahora reconocemos que: } h(x) = h(-x)$$

III. falso (F) • $(f \circ g)(-x) = f(g(x)) \Rightarrow (f \circ g)(-x) = f(g(-x)) \dots (1)$

$$\text{Pero } g(-x) = -g(x) \Rightarrow (f \circ g)(-x) = f(-g(x))$$

$$\text{Pero } f(-x) = f(x) \Rightarrow (f \circ g)(-x) = f(g(x)) \dots (2)$$

De (1) y (2): $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(-x) \Rightarrow f \circ g$ es par.

∴ La combinación correcta es FVF

Rpta.: D

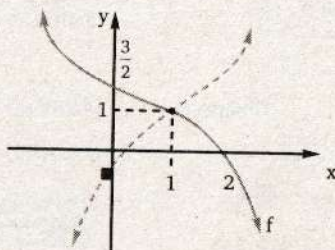
Resolución 71: La función es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 3}{2}; & x \leq a \\ 2x - x^2; & x > a \end{cases}$$

Redefiniendo la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1; & x \leq a \\ 1 - (x-1)^2; & x > a \end{cases}$$

Esbozando la gráfica:



Resolución 72: Por condición: $f: A \rightarrow B$ es una aplicación sobreyectiva.

$$y = f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}$$

$$y = f(x) = \frac{(x-2)(x+1)(x+3)}{(x-2)(x+1)(x-5)}$$

$$y = f(x) = \frac{x+3}{x-5}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1; 2; 5\}$$

Fácilmente reconocemos que:

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Por condición: $A = \mathbb{R} - \{-1; 2; 5\}$ y $B = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\Rightarrow A - B = \{1\}$$

$$\therefore \Sigma \text{ elementos de } A - B = 1$$

Rpta.: E

Resolución 73: Analizando cada función:

I. $f(x) = x; \forall x \in [-2; 2]$ es inyectiva.

II. $f(x) = x^2; \forall x \in (0; 2]$ es inyectiva.

III. $f(x) = \lfloor x \rfloor; \forall x \in [-2; 2]$ no es inyectiva.

$\therefore$ Son inyectivas I y II

Rpta.: C

Resolución 74: Como f es creciente, se cumple que:

$$|2x-1| < 3x+1$$

Equivalentemente: $3x+1 > 0 \wedge -(3x+1) < 2x-1 < 3x+1$

$$3x+1 > 0 \wedge \underbrace{-3x-1 < 2x-1 < 3x+1}_{*} \dots\dots(1)$$

$$* \quad 2x-1 > -3x-1 \wedge 3x+1 > 2x-1$$

$$5x > 0 \wedge x > -2$$

$$x > 0 \wedge x > -2$$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 10

Ahora en (1): $3x + 1 > 0 \wedge x > 0$

$$\underbrace{x > -\frac{1}{3} \wedge x > 0}_{x > 0}$$

Finalmente formamos: $x > 0$

$$2x > 0$$

$$2x + 1 > 1$$

$$\therefore A = \langle 1; \infty \rangle$$

Rpta.: C

Resolución 75: En cada enunciado.

I. Verdadero (V)

- Si f es creciente, su gráfica jamás será simetría respecto al eje y .

II. Falso (F)

- Un punto representa a una función inyectiva y no es creciente.

III. Falso (F)

- $y = f(x) = x^2$; $x \in \langle 0; \infty \rangle$ es creciente y no es impar.

$\therefore$ La combinación correcta es VFF

Rpta.: C

Resolución 76: Formaremos $\text{Ran}(f) = B$ a partir del dominio, veamos:

$$0 \leq x < 1$$

$$-1 \leq x - 1 < 0$$

$$-\infty < \frac{1}{x-1} \leq -1$$

$$-\infty < \frac{2}{x-1} \leq -2$$

$$-\infty < 1 + \frac{2}{x-1} \leq -1$$

$$-\infty < \frac{x+1}{x-1} \leq -1$$

$$-\infty < y = f(x) \leq -1$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = B = \langle -\infty; -1 \rangle$$

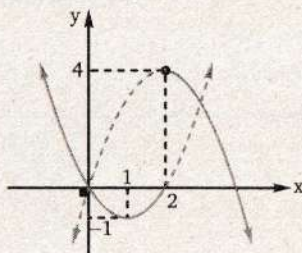
Rpta.: B

Resolución 77: La función dada es: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x; & x \leq a \\ 4x - x^2; & x > a \end{cases}$

Redefiniendo la función tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1; & x \leq a \\ 4 - (x-2)^2; & x > a \end{cases}$$

Esbozando la gráfica, según condición, tenemos:



- Decreciente en $(-\infty; 1]$
- Creciente en $[1; a] \Rightarrow a = 2$
- Decreciente en $(a; \infty)$

$$\therefore a^2 + 1 = 5$$

Rpta.: A

Resolución 78: La función dada es: $y = f(x) = 1 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

$$y = f(x) = \frac{(x-1)^2 - 2(x-1) + 1}{(x-1)^2}$$

$$y = f(x) = \frac{[(x-1)-1]^2}{(x-1)^2}$$

$$y = f(x) = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2; \quad x > 2$$

I. Veamos si f es creciente.

- Por el criterio de la primera derivada:

$$y' = f(x) = 2(x-2)(x-1)^{-3}$$

Observa que en $x > 2$; $f(x) > 0$.

Por tanto: $f(x)$ es creciente en $x > 2$.

La proposición es verdadera (V).

II. Como f es creciente, luego f es inyectiva, la proposición es verdadera (V).

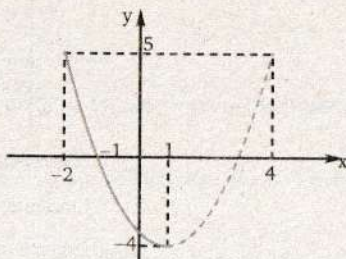
III. Como f es creciente; f^2 es creciente, la proposición es verdadera (V).

∴ La combinación correcta es VVV.

Rpta.: A

Resolución 79: La función biyectiva es: $f(x) = -4 + (x-1)^2$

Esbozando la gráfica; según condición, tenemos:



Se cumple:

$$3 - a = -2 \wedge \frac{b}{7} = -4$$

$$a = 5 \wedge b = -28$$

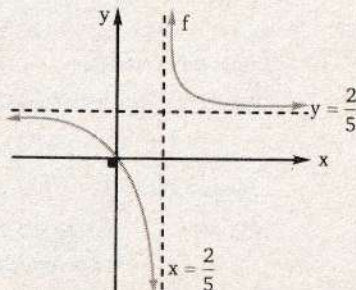
$$\therefore ab = -140$$

Rpta.: B

Resolución 80: La función dada es: $y = f(x) = \frac{2x}{5x-2}$

$$y = f(x) = \frac{2}{5} + \frac{4}{25x-10}; x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{5} \right\}$$

Esbozando la gráfica:



- I. Fácilmente reconocemos que f es biyectiva en todo su dominio.
II. Hallemos la fórmula de $f \circ f \circ f$:

Por el caso anterior:

$$f(f(x)) = x$$

$$f(f(f(x))) = f(x)$$

$$f(f(f(x))) = \frac{2x}{5x-2}$$

Fácilmente reconocemos que $f \circ f \circ f$ es inyectiva.

$\therefore$ Son correctas I, II y III.

Rpta.: A

Resolución 81:

Del enunciado: $x \cdot y = K$

Cuando: $x = 5 \wedge y = 1 \Rightarrow K = 5$

Ahora se tendrá: $x \cdot y = 5 \dots\dots\dots (*)$

Cuando x se reduce un 75%, en la fórmula (*) debemos de reemplazar x por 25% x , veamos:

$$25\% x \cdot y = 5$$

$$\frac{xy}{4} = 5$$

$$\therefore y = \frac{20}{x}$$

Rpta.: C

Resolución 82:

Del enunciado:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Carga máxima: } Q \\ \text{Diámetro: } D \\ \text{Altura: } H \end{array} \right\} \frac{Q \cdot H^2}{D^4} = K$$

Por condición:

$$\frac{8(9)^2}{(1)^4} = \frac{Q(12)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$$

$$\frac{8 \cdot 81}{1} = \frac{Q(144) \cdot (81)}{16}$$

$$8 = 9Q$$

$$\frac{8}{9} = Q$$

∴ La columna puede soportar $\frac{8}{9}$ Ton. met.

Rpta.: E

Resolución 83: La función es:

$$y = f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x + 5}$$

$$y = \frac{1}{2x^2 - 3x + 5} \Rightarrow 2y \cdot x^2 - 3yx + (5y - 1) = 0$$

Por discriminante: $(-3y)^2 - 4(2y)(5y - 1) \geq 0$

$$9y^2 - 40y^2 + 8y \geq 0$$

$$-31y^2 + 8y \geq 0$$

$$31y^2 - 8y \leq 0$$

Equivalentemente: $0 \leq y \leq \frac{8}{31} \Leftrightarrow M \leq \frac{8}{31}$

$$\therefore K = \frac{8}{31}$$

Rpta.: B

Resolución 84: Hallemos el dominio de la función, para lo cual se plantea:

$$9 - x^2 - |x^2 - 1| > 0$$

$$|x^2 - 1| < 9 - x^2$$

Equivalentemente: $9 - x^2 > 0 \wedge x^2 - 9 < x^2 - 1 < 9 - x^2$

$$x^2 - 9 < 0 \wedge \underbrace{(x^2 - 9 < x^2 - 1 \wedge x^2 - 1 < 9 - x^2)}_{x \in \mathbb{R}}$$

$$x^2 - 9 < 0 \wedge x^2 - 1 < 9 - x^2$$

$$\underbrace{(x+3)(x-3) < 0 \wedge (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) < 0}_{-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}}$$

- $f(x)$ es una función par ($f(x) = f(-x)$); luego por el dominio simétrico conviene efectuar una gráfica.
- Observa que en $-1 < x < 1$ la función es constante:

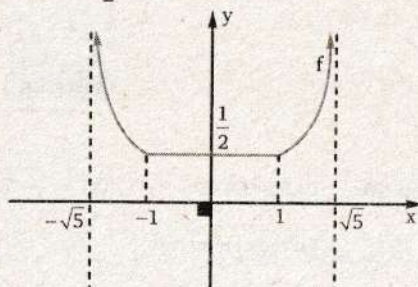
$$-1 < x < 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1$$

$$-1 \leq x^2 - 1 < 0$$

Con la cual: $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1) = 1 - x^2$

En la función: $y = f(x) = \sqrt{\frac{2}{9 - x^2 + x^2 - 1}}$

$$y = f(x) = \frac{1}{2}; \quad -1 < x < 1$$



$$f(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}$$

Rpta.: C

Resolución 85: Hallemos el rango de cada función:

$$I. f(x) = \frac{4}{|x-1| + |x-5|}$$

$$\bullet \quad |x-1| + |x-5| = |x-1| + |5-x| \geq |(x-1) + (5-x)|$$

$$|x-1| + |x-5| \geq |4|$$

$$|x-1| + |x-5| \geq 4 \Leftrightarrow 4 \leq |x-1| + |x-5| < \infty$$

$$0 < \frac{1}{|x-1| + |x-5|} \leq \frac{1}{4}$$

Ahora notamos que: $0 < f(x) \leq 1$

$$\text{II. } g(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}$$

$$\bullet \quad x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \geq 1$$

$$x^2 - 6x + 10 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2 - 6x + 10} \leq 1$$

Ahora notamos que: $0 < g(x) \leq 1$

Finalmente $\forall x \in \mathbb{R} : 0 < f(x) + g(x) \leq 2$

$$|f(x) + g(x)| \leq 2$$

$$\therefore M = 2$$

Rpta.: A

Resolución 86:

La función es:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$$

En cada enunciado:

$$\text{I. } \forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq \frac{3}{4}$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{(x-1)^2 + 2} + \frac{1}{(x-1)^2 + 4}$$

$$\text{Se sabe que: } 2 \leq (x-1)^2 + 2 < \infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{(x-1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Se sabe que: } 4 \leq (x-1)^2 + 4 < \infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{(x-1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$$

Sumando los resultados:

$$0 < \frac{1}{(x-1)^2 + 2} + \frac{1}{(x-1)^2 + 4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$0 < f(x) \leq \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ El enunciado es verdadero (V).

II. f es acotada en el conjunto: $\langle 0; \infty \rangle$

• Observa que en el caso anterior probamos que la función es acotada.

$$0 < f(x) \leq \frac{3}{4}; \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

por tanto f también será acotada en: $x \in (0; \infty)$

$\Rightarrow$ El enunciado es verdadero (V).

III. $\forall x \in (1; \infty): |f(x-1)| \leq 1$

- En el caso (I) se demostró que:

$$|f(x)| \leq \frac{3}{4}; \forall x \in \mathbb{R}$$

Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-1) \in \mathbb{R}$, por tanto $|f(x-1)| \leq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ El enunciado es falso (F).

$\therefore$ La combinación correcta será: VVF

Rpta.: B

Resolución 87:

Las funciones son: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$$g(x) = \sqrt{2x-1}$$

Fácilmente podemos reconocer que ambas funciones son inyectivas, por tanto tienen inversa. Se pide:

$$E = (f \circ (g \circ f) \circ f)(2)$$

$$E = (f \circ (f \circ g \circ f) \circ f)(2)$$

$$E = ((f \circ f) \circ g \circ f)(2)$$

II

$$E = ((f \circ g) \circ f)(2)$$

$$E = (g \circ f)(2)$$

$$E = g^*(f(2))$$

$$E = g^*(3) \Rightarrow g(E) = 3$$

- En $g(x) = \sqrt{2x-1}$ se plantea:

$$g(E) = \sqrt{2E-1}$$

$$3 = \sqrt{2E-1} \Rightarrow 9 = 2E-1$$

$$10 = 2E$$

$$\therefore E = 5$$

Rpta.: B

Resolución 88: Las funciones son: $f = \{(0; 0), (1; 0), (2; 1), (3; 2), (4; 3)\}$

$$g(x) = \sqrt{x+3}; x \in \{-3; 3\}$$

Halleemos $g^2 + f$: $\text{Dom}(g^2 + f) = \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(f)$

$$\text{Dom}(g^2 + f) = \{0; 1; 2\}$$

$$\bullet (g^2 + f)(0) = g^2(0) + f(0) = 3 + 0 = 3$$

$$\bullet (g^2 + f)(1) = g^2(1) + f(1) = 4 + 0 = 4$$

$$\bullet (g^2 + f)(2) = g^2(2) + f(2) = 5 + 1 = 6$$

$$\Rightarrow g^2 + f = \{(0; 3), (1; 4), (2; 6)\}$$

$$\Rightarrow (g^2 + f)^* = \{(3; 0), (4; 1), (6; 2)\}$$

Ahora reconocemos:

$$(g^2 + f)(a) = 3 \Rightarrow a = 0$$

$$(g^2 + f)^*(6) = b \Rightarrow b = 2$$

$$\therefore a + b = 2$$

Rpta.: A

Resolución 89: La función es: $y = f(x) = (x-2)(4-x)$

$$y = f(x) = -x^2 + 6x - 8$$

$$y = f(x) = 1 - (x-3)^2; x < 3$$

I. Veamos la inyectividad:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$1 - (x_1 - 3)^2 = 1 - (x_2 - 3)^2$$

$$(x_1 - 3)^2 = (x_2 - 3)^2$$

$$|x_1 - 3| = |x_2 - 3|$$

$$-(x_1 - 3) = -(x_2 - 3)$$

$$x_1 - 3 = x_2 - 3 \rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow f$ es inyectiva $\forall x < 3$; luego existe f^* .

II. Halleemos el rango de f :

$$y = 1 - (x-3)^2$$

Por condición tenemos que:

$$-\infty < x < 3$$

$$-\infty < x - 3 < 0$$

$$0 < (x-3)^2 < \infty$$

$$-\infty < -(x-3)^2 < 0$$

$$-\infty < 1 - (x-3)^2 < 1$$

$$-\infty < y < 1$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f) = \langle -\infty; 1 \rangle$$

III. Hallemos f^* : $f: y = 1 - (x - 3)^2; x < 3; y < 1$

$$(x - 3)^2 = 1 - y \Rightarrow |x - 3| = \sqrt{1 - y}$$

$$-(x - 3) = \sqrt{1 - y}$$

$$x - 3 = -\sqrt{1 - y}$$

$$x = 3 - \sqrt{1 - y}$$

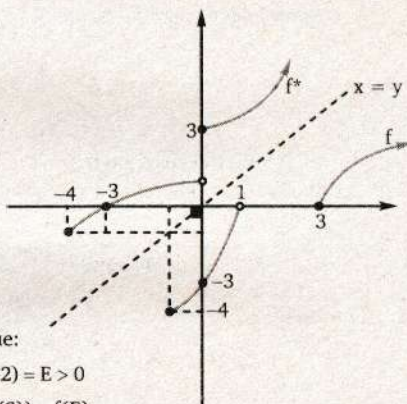
$$\therefore f^*: y = 3 - \sqrt{1 - x}; x < 1; y < 3$$

Rpta.: B

Resolución 90:

La función dada es: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}; & x \geq 3 \\ (x-1)^2 - 4; & -1 \leq x < 1 \end{cases}$

Esbozando la gráfica:



Fácilmente reconocemos que:

$$f^*(-2) = E > 0$$

$$f(f^*(2)) = f(E)$$

$$-2 = f(E)$$

Se obtiene en la fórmula:

$$f(x) = (x+1)^2 - 4$$

$$f(E) = (E+1)^2 - 4$$

$$-2 = (E+1)^2 - 4$$

$$(E+1)^2 = 2$$

$$E+1 = \sqrt{2}$$

$$\therefore E = \sqrt{2} - 1$$

Rpta.: B

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 10**Resolución 91:** Redefiniendo las funciones dadas, tenemos:

$$f: y = f(x) = \sqrt{1-x}; -3 \leq x \leq 1$$

$$g: y = g(x) = x^2; x \geq 0$$

I. Hallemos f^* :

Por condición: $-3 \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq -x \leq 3$$

$$0 \leq 1-x \leq 4$$

$$0 \leq \sqrt{1-x} \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 2$$

$$f: y = \sqrt{1-x}; -3 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2$$

$$y^2 = |1-x| \Rightarrow y^2 = 1-x$$

$$x = 1 - y^2$$

$$\Rightarrow f^*: y = 1 - x^2; 0 \leq x \leq 2; -3 \leq y \leq 1$$

II. Hallemos $g \circ f^*$:

$$\text{Dom}(g \circ f^*) = x \in \text{Dom}(f^*) \wedge f^*(x) \in \text{Dom}(g)$$

$$\text{Dom}(g \circ f^*) = 0 \leq x \leq 2 \wedge 1 - x^2 \geq 0$$

$$\text{Dom}(g \circ f^*) = 0 \leq x \leq 2 \wedge x^2 - 1 \leq 0$$

$$\text{Dom}(g \circ f^*) = \underbrace{0 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq x \leq 1}_{0 \leq x \leq 1}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(g \circ f^*) = [0; 1]$$

Se plantea: $(g \circ f^*)(x) = g(f^*(x))$

Se sabe que: $g(x) = x^2$

$$g(f^*(x)) = (f^*(x))^2$$

$$g(f^*(x)) = (1 - x^2)^2$$

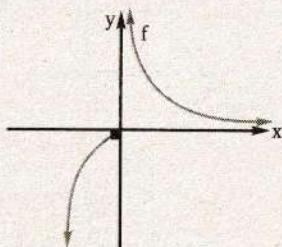
$$\therefore h(x) = (1 - x^2)^2; x \in [0; 1]$$

Rpta.: B

Resolución 92: La función dada es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -x^2; & x < 0 \end{cases}$$

Esbozando la gráfica tenemos:



Fácilmente reconocemos que f es inyectiva, luego admite inversa:

I. Para $f(x) = \frac{1}{x}; x > 0$

$$y = \frac{1}{x}; x > 0, y > 0$$

$$x = \frac{1}{y}; x > 0, y > 0$$

$$\Rightarrow f^*(x) = \frac{1}{x}; x > 0, y > 0$$

II. Para $f(x) = -x^2; x \leq 0, y \leq 0$

$$y = -x^2; x \leq 0, y \leq 0$$

$$x^2 = -y; x \leq 0, y \leq 0$$

$$|x| = \sqrt{-y}; x \leq 0, y \leq 0$$

$$-x = \sqrt{-y}; x \leq 0, y \leq 0$$

$$x = -\sqrt{-y}; x \leq 0, y \leq 0$$

$$\Rightarrow f^*(x) = -\sqrt{-x}; x \leq 0, y \leq 0$$

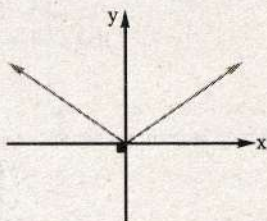
Finalmente tenemos:

$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x > 0 \\ -\sqrt{-x}; & x \leq 0 \end{cases}$$

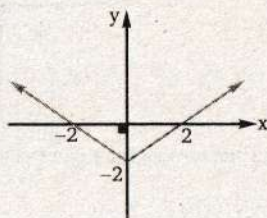
Rpta.: B

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 10**Resolución 93:** Graficando: $f(x) = ||x| - 2|$

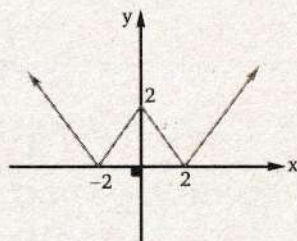
I. $y = |x|$



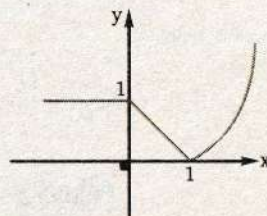
II. $y = |x| - 2$



III. $y = f(x) = ||x| - 2|$

**Rpta.: D****Resolución 94:** Graficando: $g(x) = f(|x - 1|)$

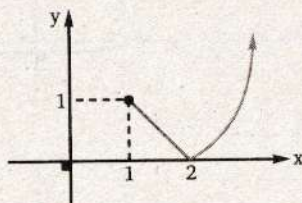
I. Gráfica dato: $y = f(x)$:



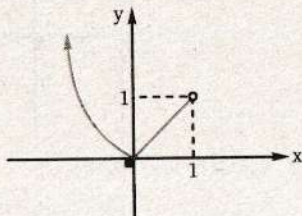
II. Redefiniendo la función g:

$$f(|x-1|) = \begin{cases} f(x-1); & x \geq 1 \dots\dots f_1 \\ f(-x+1); & x < 1 \dots\dots f_2 \end{cases}$$

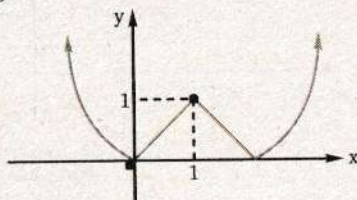
III. Graficando f_1 :



IV. Graficando f_2 :



V. $y = g(x) = f(|x-1|)$

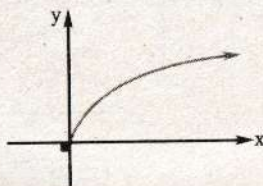


Rpta.: D

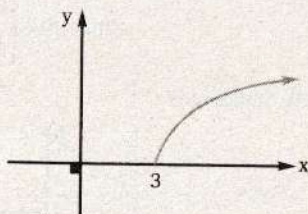
Resolución 95: Graficando:

$$f(x) = |\sqrt{x-3} - 1|$$

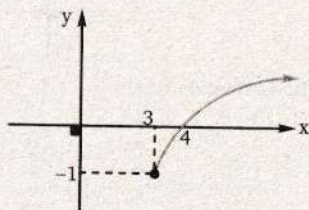
I. $y = \sqrt{x}$



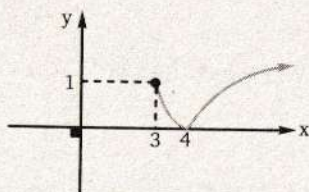
II. $y = \sqrt{x-3}$



III. $y = \sqrt{x-3} - 1$



IV. $y = f(x) = |\sqrt{x-3} - 1|$



Rpta.: D

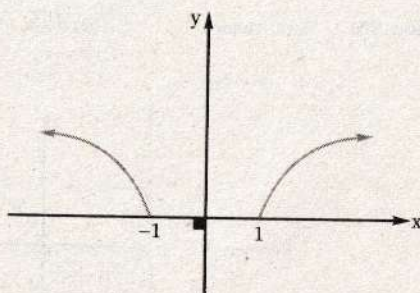
Resolución 96:

Graficando:

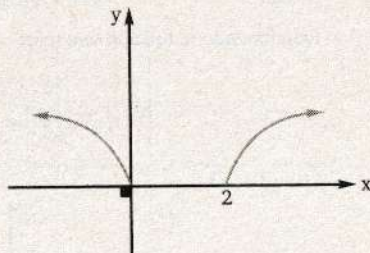
$$g(x) = |2 - f(x-1)|$$

I. Gráfica dato:

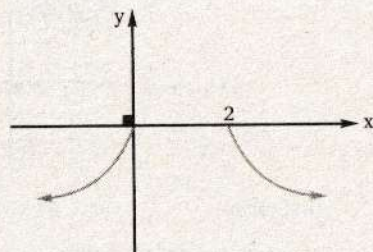
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$



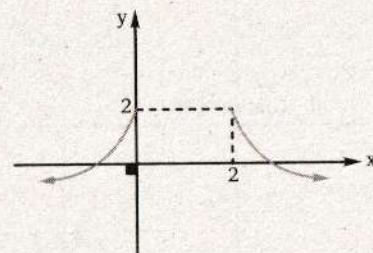
II. $y = f(x-1)$



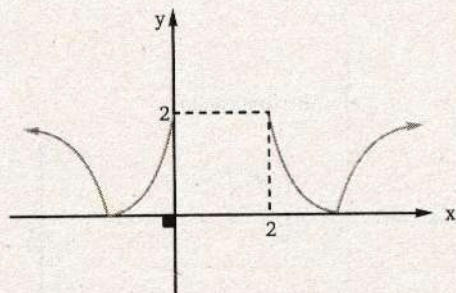
III. $y = -f(x-1)$



IV. $y = 2 - f(x-1)$



V. $y = g(x) = |2 - f(x-1)|$

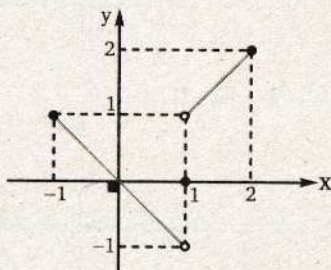


Rpta.: C

Resolución 97: Se tiene: $f(x) = x \operatorname{sgn}(x-1); -1 \leq x \leq 2$

Redefiniendo la función tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x; & 1 < x \leq 2 \\ 0; & x = 1 \\ -x; & -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

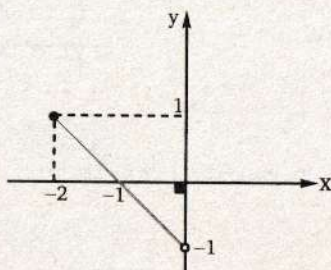


Graficando $g(x) = f(1 - |x|)$

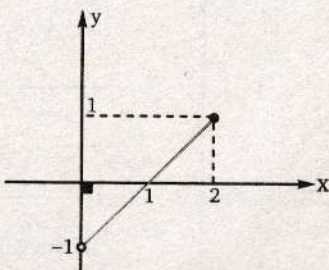
I. Redefiniendo la función:

$$f(|1-x|) = \begin{cases} f(1+x); & x < 0 \dots\dots f_1 \\ f(1-x); & x \geq 0 \dots\dots f_2 \end{cases}$$

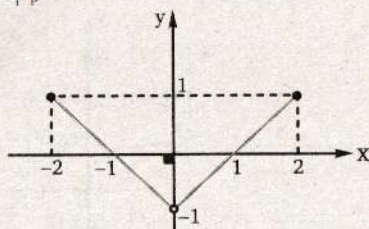
II. Graficando f_1 :



III. Graficando f_2 :



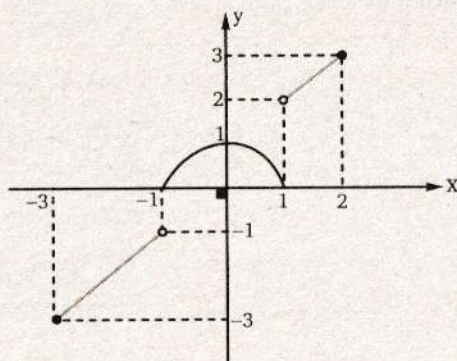
IV. $y = g(x) = f(1 - |x|)$



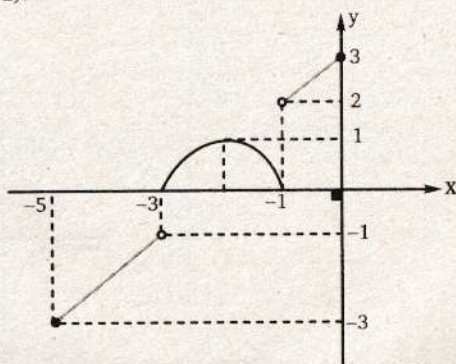
Rpta.: B

Resolución 98: Se tiene:

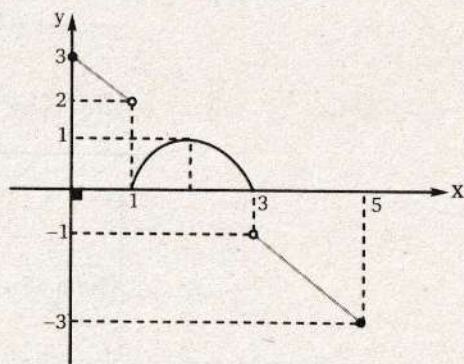
$$f(x) = \begin{cases} x; & -3 \leq x < -1 \\ \sqrt{1-x^2}; & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1; & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



1. Graficando $f(x + 2)$:



II. $y = f(2 - x)$



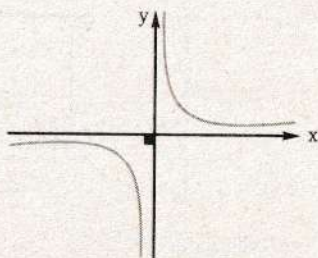
Rpta.: D

Resolución 99: Graficando:

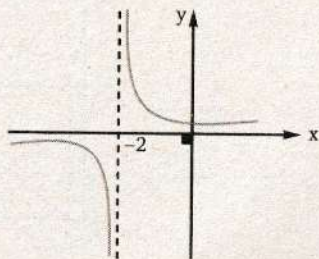
$$f(x) = \frac{-3x}{x+2}; x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$f(x) = -3 + \frac{6}{x+2}; x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

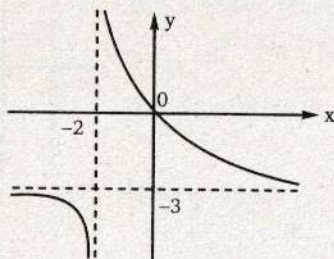
I. $y = \frac{6}{x}$



II. $y = \frac{6}{x+2}$



III. $f(x) = -3 + \frac{6}{x+2}$



Rpta.: A

Resolución 100: Se pide la gráfica de:

$$g(x) = \left| \frac{10 - 2x}{x - 2} \right|$$

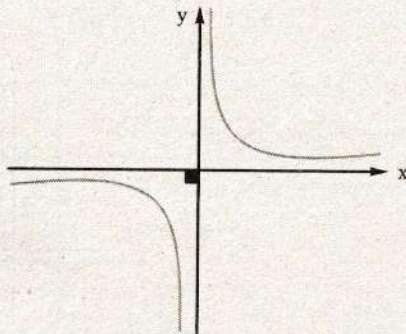
Reescribiendo la fórmula:

$$g(x) = \left| \frac{2x - 10}{x - 2} \right|$$

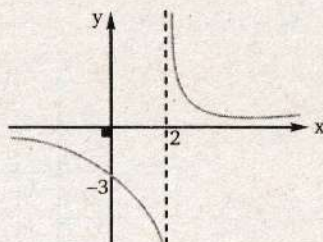
$$g(x) = \left| \frac{2x - 10}{x - 2} \right|$$

$$g(x) = \left| 2 - \frac{6}{x - 2} \right|$$

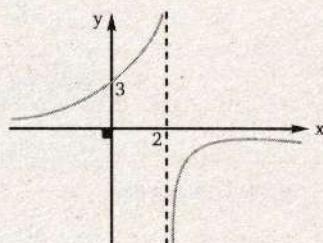
I. $y = \frac{6}{x}$



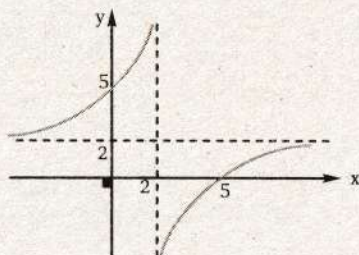
II. $y = \frac{6}{x-2}$



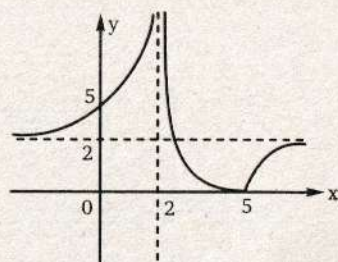
$$\text{III. } y = -\frac{6}{x+2}$$



$$\text{IV. } y = 2 - \frac{6}{x-2}$$



$$\text{V. } y = g(x) = \left| 2 - \frac{6}{x-2} \right|$$



Rpta.: A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuál o cuáles de los conjuntos:

I. $F = \{(2; 1), (0; 1), (-2; 2), (0; 0)\}$

II. $G = \{(-1; 0), (-1; 0), (-1; 0)\}$

III. $H = \{(2; 1), (1; 2), (1; 1), (2; 2)\}$.
representa a una función?

- A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) II y III E) I y III

2. Calcular: "ab", si el conjunto:

$F = \{(2; 5), (-1; 3), (2; 2a-b), (-1; b-a),$
 $(a + b^2; a)\}$
es una función.

- A) 12 B) 104 C) 88
D) 24 E) 36

3. Dadas las funciones:

$f = \{(3; 5), (4; 9), (5; 12)\}$

$g = \{(2; 3), (5; 4), (9; 3)\}$

Calcular: $f[g(2)] + g[f(3)]$.

- A) 12 B) 9 C) 3
D) 7 E) 8

4. Sea: $A = \{1, 2, 4\}$ y "f" una función definida en A; por:

$f = \{(1; 3), (2; a), (a+1; 2), (1; b-1)\}$

Hallar: $f(1) - f(2) + f(4)$.

- A) 6 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

5. Hallar el dominio de la siguiente función:

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

- A) $x \leq 2 \wedge x \geq -2$ B) $x \geq 2$
C) $x \leq -2$
D) $x \geq 1$ E) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$

6. Hallar el rango de la función:

$$f(x) = x^2 - 3$$

- A) $[3; +\infty)$ B) $[-3; 0)$ C) $[-3; +\infty)$
D) $[0; +\infty)$ E) $(-\infty; +\infty)$

7. Indicar el rango de:

$$H = \left\{ (x; y) / y = \frac{x}{x-3} \right\}$$

- A) $\mathbb{R} - \{-3\}$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{R} - \{1\}$
D) $\mathbb{R} - \{0\}$ E) $\mathbb{R} - \{3\}$

8. Determinar el rango de la función real de variable real; cuya regla de correspondencia es:

$$y = f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- A) $[-1; 1]$ B) $(-1; 1)$ C) $[-1; \infty)$
D) $[0; 1]$ E) $(-\infty; 0]$

9. Dada la función:

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 2, x \in \mathbb{R} \text{ donde:}$$

$$\text{Ran}(f) = \left[\frac{a}{a+1}; \infty \right), \text{ calcular "a".}$$

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

10. Sea la función: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = A$.

$A \in \mathbb{Q}^+$; llamada función constante. Se

sabe que: $f^2(2012) + f(1994) = 12$.

$$\text{Hallar : } E = \sum_{k=1}^{10} f(k)$$

- A) -40 B) -20 C) 30
D) 20 E) 40

11. Si: $\langle a; b \rangle$ es el dominio de la función f , definida por:

$$f = \left\{ \left\langle \frac{2x+1}{2x+3}; x \right\rangle \in \mathbb{R}^2 / x \in \langle 0; 10 \rangle \right\}$$

entonces la relación correcta entre los valores de "a" y "b"; es:

- A) $a + 3b = 25$ B) $3a + 6b = 10$
C) $6a + 23b = 25$
D) $6a + 46b = 44$ E) $5a + 6b = 36$

12. Determinar el menor valor que asume función real de variable real cuya regla de co-rrespondencia es:

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 2}$$

- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{5}{3}$ E) 1

13. Dada la función:

$$f(x) = \sqrt[n]{a^n - x^n}; n \in \mathbb{N} \wedge a > 0$$

I. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \forall n$ impar.

II. $\text{Dom}(f) = [-a; a]; \forall n$ par

III. $f(x) = f(-x); \forall n$ par
Indicar el valor de verdad.

- A) VVV B) VVF C) VFV
D) FFV E) FFF

14. Sea la función lineal: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = |ax^2 - 3ax + a - 2| + ax^2 - ax + 3.$$

Indicar los valores del parámetro real "a" que definen completamente la función "f".

- A) $a \in \left\langle 0; \frac{8}{5} \right\rangle$ B) $a \in \left\langle 1; \frac{5}{3} \right\rangle$
C) $a \in \left\langle -\frac{8}{5}; 1 \right\rangle$
D) $a \in \mathbb{R}$ E) $a \in \left\langle -\frac{8}{5}; 0 \right\rangle$

15. Calcular el rango de la función:

$$f(x) = -\sqrt{2x - \sqrt{x}}$$

$$\text{Si: } Df = x \in [1; 9].$$

- A) $\langle 1; \sqrt{15} \rangle$ B) $\langle -1; \sqrt{15} \rangle$
C) $\langle \sqrt{15}; 1 \rangle$
D) $[-\sqrt{15}; -1]$ E) $\langle 0; \sqrt{15} \rangle$

16. Para la función:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 + |x - 10| + |x|;$$

$2 \leq x \leq 10$; "A" es el menor valor real y

"B" es el mayor valor real. Tal que:

$$B \leq f(x) \leq A. \forall x \in [2; 10]. \text{ Hallar: } A + B$$

- A) 80 B) 96 C) 103
D) 106 E) 115

17. Sea: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+1|} - x}$ una función.
Calcular: $Df \cap Rf$.

- A) $]0; 1[$ B) $]0; 1[$ C) $]0; 1[$
D) $]0; \infty[$ E) $\emptyset$

18. Calcular el dominio de la función:

$$f(x) = \text{sen} \sqrt{(x^2 - a^2)|x^2 - b^2|};$$

$$|a| < |b|.$$

- A) $x \in]-a; a[$ B) $|x| \geq |a|$
C) $|x| \geq |b|$
D) $x \in \mathbb{R}^+$ E) $x \in \emptyset$

19. Hallar el rango de la función:

$$f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} - 1$$

- A) $[-1; 1]$ B) $[0; 1]$ C) $[-1; 0]$
D) $\langle -\infty; 1 \rangle$ E) $\mathbb{R}$

20. Hallar el rango de:

$$G(x) = \frac{4x^2 - 1}{|2x + 1|}$$

- A) $\langle -2; 2 \rangle$ B) $[-2; 2]$ C) $\langle 2; +\infty \rangle$
D) $\langle -2; +\infty \rangle$ E) $\langle -2; 2]$

21. Calcular el dominio de la función:

$$f(x) = 8 \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{\sqrt{21} - \sqrt{x^2 - 4}}}$$

- A) $[-5; 5]$
B) $\langle -5; -2] \cup [4; 5)$
C) $\langle -5; -2) \cup \langle 4; 5)$
D) $[-5; -2] \cup \langle 4; 5]$
E) $\langle -2; 2]$

22. Determinar el máximo valor de la función: $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 4$, en el intervalo $[-1; 1]$.

- A) -4 B) 3 C) 1
D) 7 E) 5

23. Si el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{6 - \sqrt{x^4 - 10x^3 + 25x^2}}$$

es $[a; b] \cup [c; d]$.

Calcular: $(a + b + c + d)$.

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

24. Dadas las funciones:

$$f = \{(1; 4), (2; 5), (3; 6), (5; 5)\}$$

$$g = \{(0; -3), (1; 0), (2; 0), (3; -8), (4; 1)\}$$

Indicar un elemento del rango de H , donde: $H = f \cdot g$

- A) -16 B) 2 C) 3
D) -48 E) -24

25. Determinar el dominio de $2f - g$; siendo:

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sqrt{4 - x}\}$$

$$g = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \right\}$$

- A) $\langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 2; 4)$
B) $\langle -\infty; -2] \cup [2; 4)$
C) $\langle -\infty; -2) \cup [2; 4]$
D) $\langle -\infty; -2] \cup \langle 2; 4]$
E) $\langle -\infty; -2) \cup \langle 2; 4]$

26. Dadas las funciones:

$$F = \{(-1; 2), (2; 2), (3; 7), (4; 3), (5; -3)\}$$

$$G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = G(x) = |x| +$$

$$2 \operatorname{sgn}\left(\frac{x-1}{x+2}\right); x \in \langle -1; 9 \rangle\}$$

Determinar la suma de los elementos del conjunto solución de:

$$H(x) > 6; \text{ donde: } H = F + G$$

- A) 5 B) 7 C) 9
D) 14 E) 8

27. Dadas las funciones:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = |x^2 - 6x| + |x - 3| + x$$

$$x \in [0; 3].$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = G(x) = x|x| - 6; x \in \langle -2; 4]$$

Determinar el rango de: $F + G$.

- A) $\langle 0; 3]$ B) $[0; 3]$ C) $[-3; 15]$
D) $\langle -3; 3]$ E) $[-3; 3]$

28. Si:

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x) = \sqrt[4]{3 - |x|}\}$$

$$G = \{(-4; 1), (-3; 0), (-1; 5), (2; -1), (7; 4)\}$$

Indicar el número de elementos de: $\frac{G}{F}$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

29. Si: $f(x-2) \equiv x^2 - x + 1$; $g(x-a) \equiv x$
Determinar el valor de "a" para que se verifique: $(f \cdot g)(2) = (g \cdot f)(a-2)$

- A) 4 B) -12 C) -7
D) 3 E) 1

30. Sean f y g dos funciones tales que:

$$f(x) = g(g(x)) - x^2 \cdot g(x)$$

$$g(x) + 1 = x^2$$

se inscribe un rectángulo en la región determinada por la gráfica cartesiana de f y la recta: $y = -6$; en la cual descansa una de las bases.

Calcular la máxima área que podrá tener dicho rectángulo.

- A) $8u^2$ B) $10u^2$ C) $8\sqrt{2}u^2$
D) $16u^2$ E) $16\sqrt{2}u^2$

31. Si: f y g, son funciones definidas por:

$$f(x) = -x; x \in \left[0; \frac{5}{4}\right]$$

$$g(x) = -\frac{1}{x}; x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{3}{2}\right]$$

Entonces; la longitud total de la gráfica de la función $(f \cdot g)(x)$ es:

- A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{7}{8}$
D) 1 E) $\frac{9}{8}$

32. Considerar la función f; definida así:

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{7-x}; \forall x \in \langle 3; 6 \rangle;$$

si: $f(x) \leq f(x_0)$; entonces el valor de:

$$[f(x_0)]^{x_0} \text{ es:}$$

- A) 144 B) 81 C) 16
D) 216 E) 64

33. Hallar el rango de la función:

$$y = f(x) = |\sin x| + \sin x;$$

$$0 \leq x \leq 360^\circ$$

- A) $\langle -1; 1 \rangle$ B) $[-1; 0]$ C) $[1; 2]$
D) $\langle 0; 2 \rangle$ E) $[0; 2]$

34. Dada la función f; definida así:

$$I. f(x) > 0; \forall x \in \mathbb{N}$$

$$II. f(x+y) = \frac{3}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}; \forall x \wedge y \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{Calcular: } \prod_{k=1}^n f(k) \cdot \prod_{k=1}^n f(2k)$$

- A) 3^n B) 5^n C) 2^n
D) 1 E) 2

35. Dadas las funciones:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = \sqrt{x-1}$$

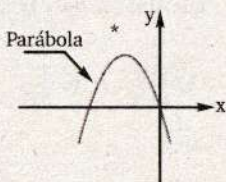
$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = G(x) = \left\lfloor x^2 - 4 \right\rfloor; x > 0$$

Determinar el dominio de: $\frac{F}{G}$.

- A) $[1; 2] \cup [\sqrt{5}; \infty)$ B) $[1; 2] \cup [\sqrt{5}; \infty)$
C) $[1; 2] \cup \langle \sqrt{5}; \infty \rangle$
D) $[1; 2] \cup \langle \sqrt{5}; \infty \rangle$ E) $[1; 2]$

36. La gráfica de "f" es aproximadamente; la mostrada (*), si $f(x) \leq f(-8)$; $\forall x \in \mathbb{R}$; hallar la media geométrica de los valores de "k" al resolver: $f(2-k) = 0$

- A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10



37. Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}; \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$$

Hallar el rango: $f(x)g(x)$.

- A) $\langle 2; 4 \rangle$ B) $\langle 2; +\infty \rangle$ C) $\langle -\infty; -2 \rangle$
D) $\langle -4; -2 \rangle$ E) $\langle 0; +\infty \rangle$

38. Sea: $f(x) = -(x-1)^2 + 2$.

Si: $A(x) = b f(x) / (1-x)$; con $b > 0$ y $f(x+b) = f(x)$.

Hallar en qué intervalo se encuentra $A(x)$; cuando $0 < x < 1$.

- A) $\langle -6; 7 \rangle$ B) $\langle 2; 4 \rangle$ C) $\langle 0; 1 \rangle$
D) $\langle 0; 4 \rangle$ E) $\langle 1; 4 \rangle$

39. Dada la función:

Determine el valor de las afirmaciones:

$$f(x) = 3x$$

- I. Si: $|x-1| < 0,1$; entonces:

$$|f(x)-3| < 0,3.$$

- II. Si: $|f(x)| = 3$; entonces: $x \in \{-1; 1\}$

- III. Si: $|f(x)-3| < 0,6$; entonces:

$$|x-1| < 0,1$$

- A) VVV B) VFF C) VFV
D) VVF E) FVV

40. Sea la función: $f: \langle 1; \infty \rangle \rightarrow \mathbb{N}$; tal que $f(x)$ es el número de primos menores o iguales a "x", si:

$$g(x) = \frac{f(\sqrt{x}) \cdot x^2 + 3f(8)}{x + f(f(f(23)))}$$

entonces; $f(g(4))$ es igual a:

- A) 0 B) 1 C) $\frac{17}{7}$
D) $\frac{13}{5}$ E) 3

41. Sea: $f(x+3) = f(x) + f(3)$.

Además: $f(0) = 0$; $f(3) \neq 0$; $x \in \mathbb{R}$.

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $f(3) = -f(-3)$

II. $3f(6) = 6f(3)$

III. $\frac{f(27)}{f(3)} = 9$

- A) VFV B) VFF C) VVF
D) VVV E) FVV

42. Dadas las funciones:

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sqrt{4-x}\}$$

$$G = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \right\}$$

Entonces; el dominio de la función:

$F+G$ es:

- A) $2 \leq x \leq 4$
B) $-\infty < x \leq -2$
C) $\{-\infty < x \leq -2\} \cup \{2 \leq x < \infty\}$
D) $\{-\infty < x < -2\} \cup \{2 < x \leq 4\}$
E) $-\infty < x \leq 4$

43. Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 - \sqrt{x^2 - 1}; g(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 1}$$

Sea A el dominio de $(f + g)$ y B el rango de $(f + g)$. Entonces; $A \cup B$ es:

A) $\mathbb{R}$ B) $\{-1; 1\}$

C) $\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$

D) $[0; \infty)$ E) $[1; \infty)$

44. El rango de:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} [(x-1)^2 + 2|x|] \text{ es:}$$

A) $\mathbb{R} - [-1; 1]$ B) $\langle -1; 1 \rangle$

C) $\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$

D) $\langle -\infty; 0 \rangle$ E) $\langle -1; \infty \rangle$

45. Hallar el valor positivo de la función:

$$f(x) = \frac{a^2 - x^2}{b^2 + x^2}; a, b \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}$$

A) $\frac{a^2}{b^2}$

B) $\frac{b^2}{a^2}$

C) 1

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{a}{b}$

46. Sean;
- g
- y
- h
- ; funciones definidas sobre los enteros positivos y dados por:

$$g(n) = \begin{cases} 1; & n = 1 \\ 2g(n-1); & n \neq 1 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 3h(n-1); & n \neq 3 \\ g(n); & n = 3 \end{cases}$$

El conjunto de valores de $h(n)$ para: $n \leq 3$ es:

A) $\{x = 3^{3-n} \cdot 2^2; n \leq 3\}$

B) $\{x = 3^{n-1} \cdot 2^3; n \leq 3\}$

C) $\{x = 3^{3-n} \cdot 2; n \leq 3\}$

D) $\{x = 3^{2-n} \cdot 2^2; n \leq 3\}$

E) $\{x = 3^{3-n} \cdot 2^2; n \leq 2\}$

47. Sea la función:

$$f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x + 5}$$

Hallar el menor valor positivo K; tal que: $f(x) \leq K; \forall x \in \text{Dom}(f)$

A) $\frac{2}{11}$

B) $\frac{8}{31}$

C) $\frac{11}{4}$

D) 3

E) $\frac{31}{3}$

48. Sea:
- $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$
- una función definida para los "x" que cumplen la siguiente relación:

$$\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{3}$$

Hallar el intervalo donde varía $f(x)$.

A) $\langle -2; -1 \rangle$ B) $[1; 2,25]$ C) $[2; 5]$

D) $[2; 2,25]$ E) $[3; 5,25]$

49. Sea F; una función real de variable real
- $\forall x \neq \{0; 1\}$
- , se verifica:

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x + 1$$

Hallar: $f(x)$

A) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ B) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x - 1)}$

C) $f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{2x^2 - 2x}$

D) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 2}$ E) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 2x}$

50. Hallar el valor mínimo de la función:

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$$

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

51. Sea la función:

$$f(x) = \left[\frac{3(3x+1)}{2(x+3)} + \frac{1}{2} \right], x \in (0; 1)$$

Entonces; el menor número "m"; tal que: $f(x) \leq m$ es:

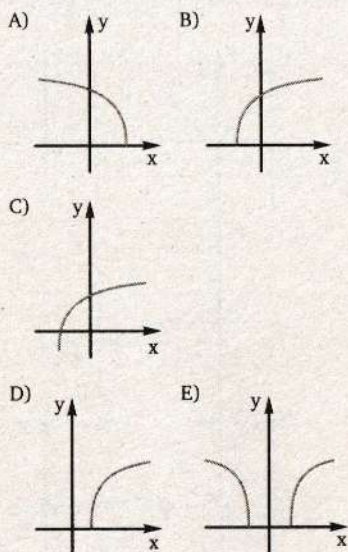
- A) 2 B) 3 C) 1
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

52. Determinar el conjunto de valores del número real "r"; tal que la función:

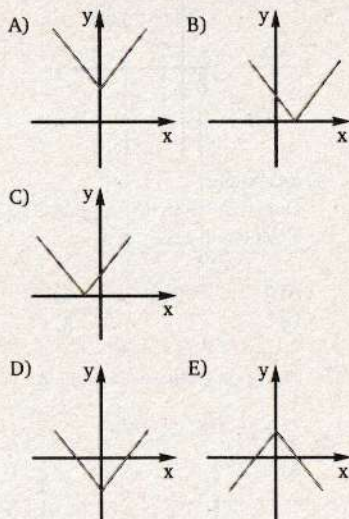
$f(x) = (rx^2 - 2rx + 1)^{-1}$ esté definida en $[0; 1]$

- A) $(-\infty; 0]$ B) $(0; +\infty)$ C) $[0; 1]$
D) $(-\infty; 1)$ E) $[1; +\infty)$

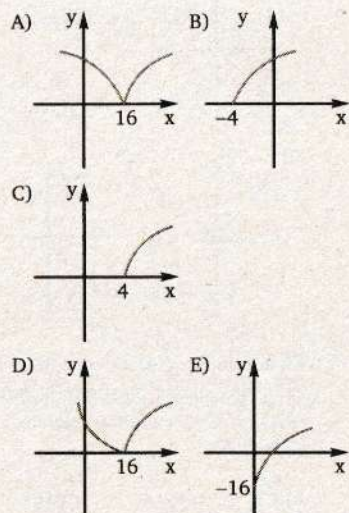
53. Graficar la función: $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$



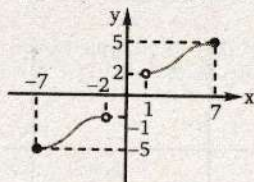
54. Graficar la función: $f(x) = |-x| - 4$



55. Graficar la función: $f(x) = |\sqrt{x} - 4|$



56. Dada la gráfica de $f(x)$:



Se cumple:

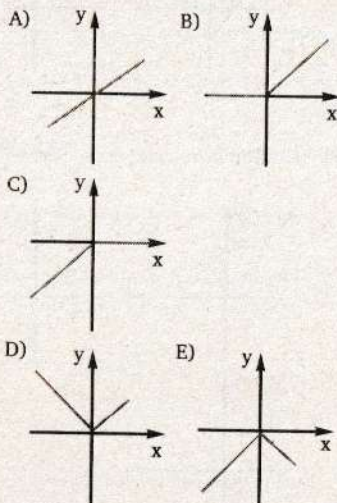
$$\text{Dom } f(x) \cap \text{Ran } f(x) = [a; b) \cup [c; d]$$

Calcular: $a + b + c + d$.

- A) 0 B) 1 C) -3
D) E) -

57. Indicar la gráfica de la función:

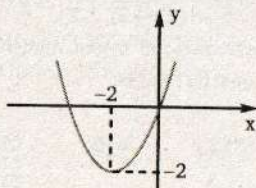
$$f(x) = x + \sqrt{x^2}$$



58. En la función: $f(x) = (x - a)^2 + b$. El valor de "x" que hace que la función acepte a 7 como mínimo valor es 7. Hallar: "ab".

- A) 7 B) 14 C) 49
D) -49 E) 0

59. Dada la gráfica de una función cuadrática $f(x)$.

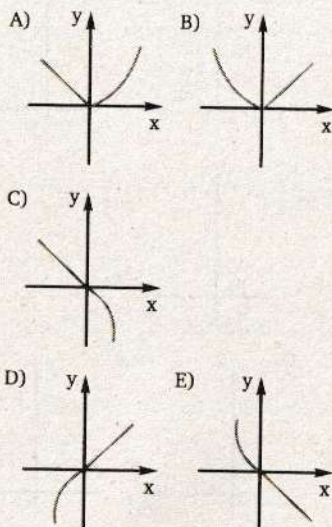


¿Cuál de las siguientes funciones se anulará para un solo valor real de las abscisas?

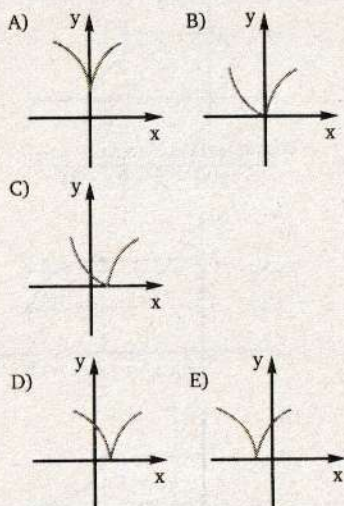
- A) $G(x) = 2 + f(x+1)$
B) $G(x) = -2 + f(x-2)$
C) $G(x) = 1 - f(x+2)$
D) $G(x) = 2 - f(x+2)$
E) $G(x) = f(x-2)$

60. Graficar:

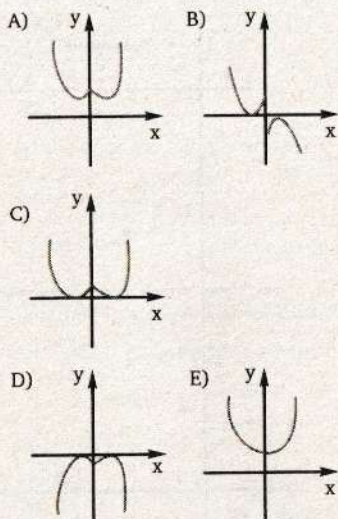
$$f(x) = \begin{cases} x^2; & \text{si } x < 0 \\ x; & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



61. Graficar: $y = |\sqrt{x+2} - 3|$

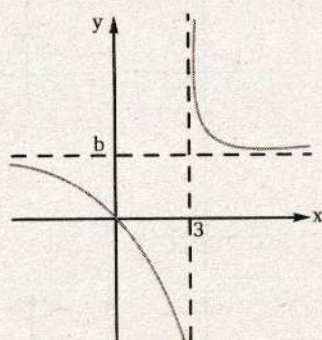


62. Sea la función: $y = (|x| - a^2)^2$; $a < 0$. Indicar su gráfica.



63. Hallar $a + b$; si la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x-a}; \text{ es:}$$



- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

64. Hallar el área de la región formada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = abx - b^2; ab > 0 \text{ y } g(x) = 2b^2 \text{ con el eje de las ordenadas.}$$

- A) $9b^3$ B) $\frac{9b^3}{a}$ C) $\frac{2a}{9b^3}$
D) $\frac{2b^3}{9a}$ E) ab

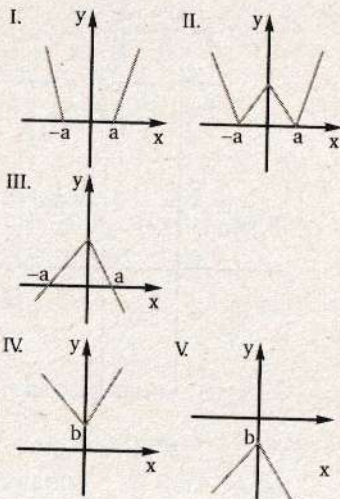
65. Obtener la pendiente de:

$$f(x) = Ax + B + 2$$

sabiendo que la gráfica $f(x)$ pasa por el punto $(8; 38)$ y por el punto $(0; -2)$

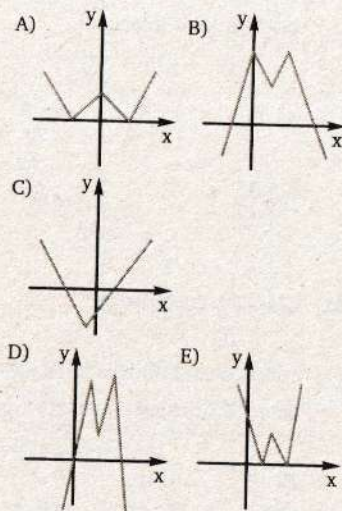
- A) -2 B) 4 C) 5
D) 3 E) 1

66. Graficar: $f(x) = a|x| + b$; si: $ab > 0$

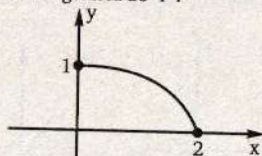


- A) I B) II y III C) III y V
D) IV y V E) II y V

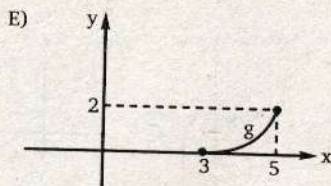
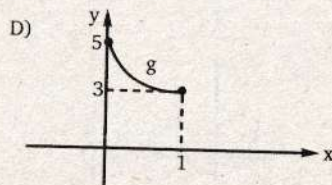
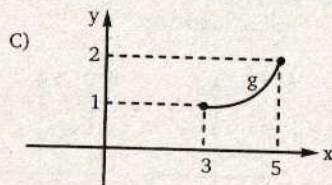
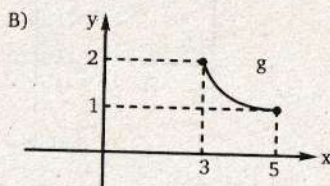
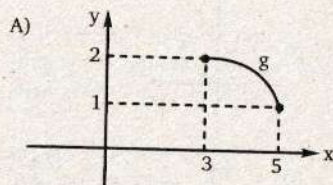
67. Graficar: $f(x) = 3 - ||x - 5| - 1|$



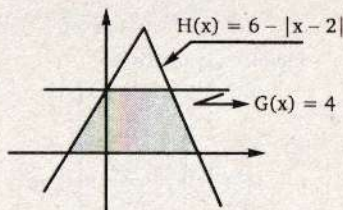
68. Dada la gráfica de "f".



Bosquejar la gráfica de:
 $g(x) = 2 - f(x - 3)$

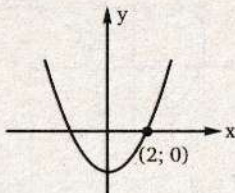


69. Calcular el área de la región sombreada limitada por las funciones indicadas



- A) 24 B) 32 C) 48
D) 16 E) 20

70. En el siguiente gráfico:



Hallar la ecuación de la parábola si el punto $(3; 2)$ pertenece a ella y su rango es el intervalo: $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$

- A) $x^2 - 3x + 2 = y$ B) $y = x^2 + 3x + 2$
C) $y = x^2 - 3x - 2$
D) $2x^2 + 3x + 2 = y$ E) $2x^2 - 3x - 2 = y$

71. Determinar la suma de los elementos del rango de la siguiente función:

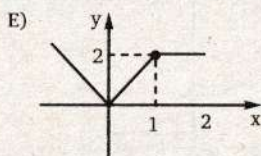
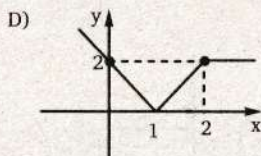
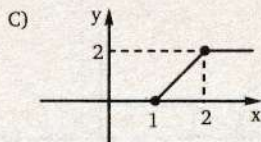
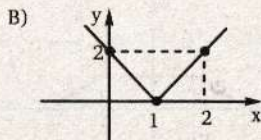
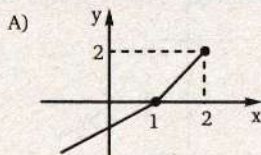
$$H(x) = \left\lfloor \frac{100}{1 + x^2} \right\rfloor$$

- A) 5000 B) 3050 C) 1500
D) 5050 E) 1750

72. Si "f" es una función definida por:

$$f(x) = |x - |x - 2||,$$

entonces la gráfica de "f" es:

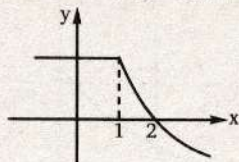


73. Hallar el rango de la función:

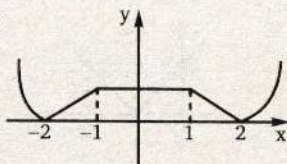
$$\text{Gr}(f) = \left\{ \left(x; \frac{x}{x-4} \right) \mid \sqrt{x} (x^2 - 4) \geq 0 \right\}$$

- A) $]-\infty; -1[\cup \{0\}$
B) $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\cup \{0\}$
C) $]1; 6] \cup \{0\}$
D) $]-\infty; -1]$
E) $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

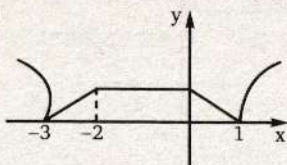
74. En la figura adjunta, se muestra la gráfica de la función "f". Entonces la gráfica de: $g(x) = |f(1-x)|$ es:



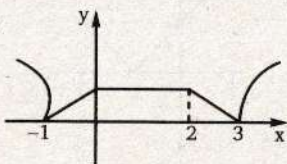
A)



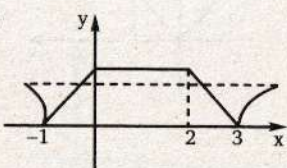
B)



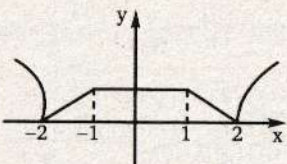
C)



D)



E)



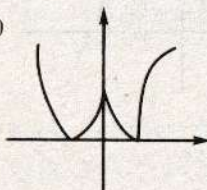
75. Si "f" es una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 0 \\ \sqrt{x}; & x \geq 0 \end{cases}$$

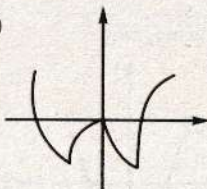
Entonces, la gráfica de:

$$g(x) = |f(x-1) - 1|; \text{ es:}$$

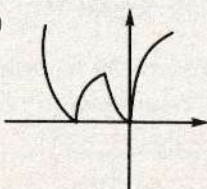
A)



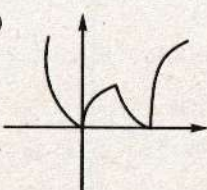
B)



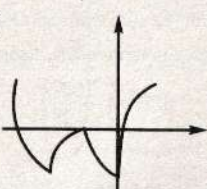
C)



D)



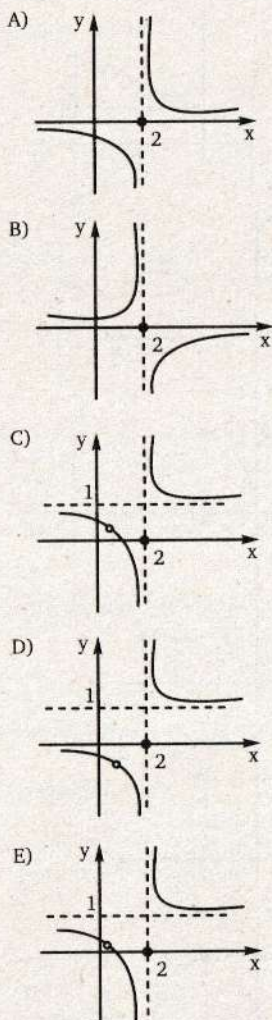
E)



76. Si "f" es una función definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2};$$

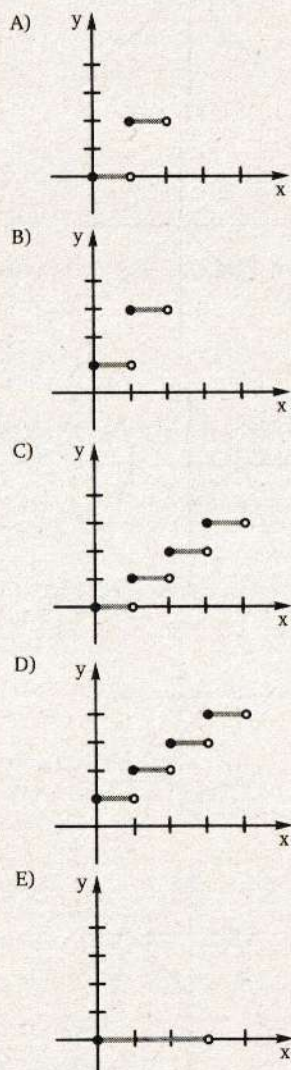
entonces la gráfica de "f" es:



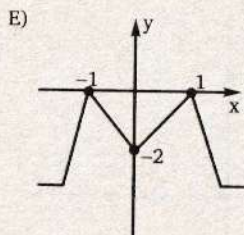
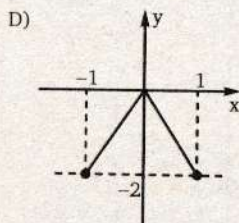
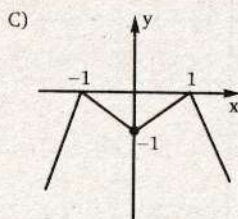
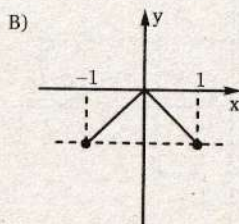
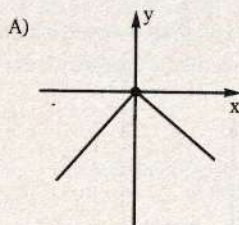
77. Dada la función:

$$y = F(x) = \lfloor 2x \rfloor \wedge \text{Dom}(F) = [0; 2)$$

Identificar la gráfica cartesiana aproximadamente de la función: $y = F(x)$

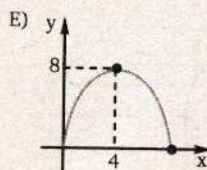
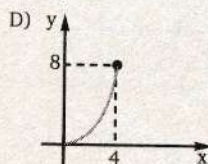
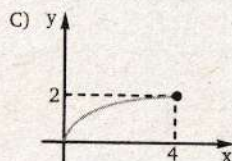
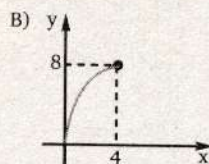
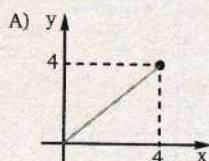
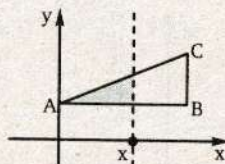


78. Graficar: $f(x) = -||x+1| - |x-1||$

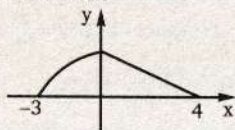


79. Sea $f(x)$ el área del triángulo ABC que queda a la izquierda de la recta paralela al eje "y" y que tiene abscisa "x". ¿Cuál es la gráfica de $f(x)$?

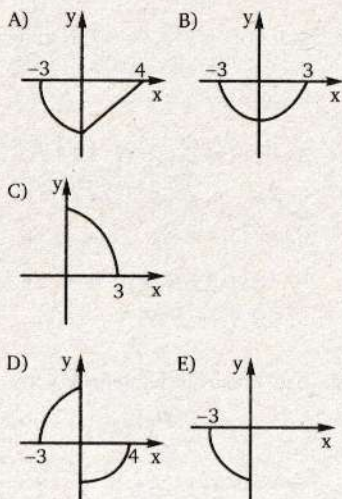
A = (0; 2) B = (4; 2) C = (4; 6)



80. Dada la función:



Hallar: $-F(-|x|)$.



81. La función, $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ es:

- A) par
C) periódica
D) no periódica
- B) impar
E) constante

82. Dadas las funciones:

$$G = \{(3;6), (5;9), (8;4), (7;6), (10;5)\}$$

$$H = \{(3;9), (5;12), (7;9), (8;7)\}$$

Hallar una función F , tal que:

$$H = (F \circ G)$$

- A) $\{(4;7), (6;9), (9;12)\}$
B) $\{(4;6), (6;7), (9;9)\}$
C) $\{(4;9), (6;4), (9;6)\}$
D) $\{(4;12), (6;9), (9;7)\}$
E) $\{(4;12), (6;10), (14;8)\}$

83. Si:

$$h = g \circ f = \{(x; 2\sqrt{x} + 3)/x \in [0; \infty)\}$$

$$y g(x) = 2x + 3. \text{ Hallar "f".}$$

- A) $f = \{(x;x)/x \in [0; \infty)\}$
B) $f = \{(x;\sqrt{x})/x \in [0; \infty)\}$
C) $f = \{(x;x^2)/x \in [0; \infty)\}$
D) $f = \{(x;|x|)/x \in [0; \infty)\}$
E) $f = \{(x; 2\sqrt{x})/x \in [0; \infty)\}$

84. Dadas las funciones:

$$F(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}; G(x) = x - 1$$

Hallar el dominio de $(F \circ G)$.

- A) $[-1; 3]$ B) $[-1; 2]$ C) $[-1; 1]$
D) $[-1; 4]$ E) $[-1; 8]$

85. Si: $f(x^2 - 1) = 2x^2 + 4 \wedge g(x) = 3x + 2$,
hallar: $(f \circ g)(2x - 1)$

- A) $8x + 2$ B) $12x + 4$ C) $9x - 6$
D) $6x + 6$ E) $7x + 2$

86. Sabiendo que F y G , son funciones:
 $(G \circ F)(x) = x + 2$

$$F(x) = x^2(x + 6) + 4(3x + 2)$$

Calcular $G(x)$ e indicar como respuesta
 $G(-x^3)$

- A) x B) x^2 C) 1
D) $-x$ E) $8x$

87. Dadas las funciones:

$$F(x) = \sqrt{1-x}; G(x) = \sqrt{4-x^2}$$

Determinar: $F \circ G$.

- A) $\sqrt{1-\sqrt{4-x^2}}; x \in [-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 3]$
B) $\sqrt{1-\sqrt{4-x^2}}; x \in \mathbb{R}$
C) $\sqrt{1-\sqrt{4-x^2}}; x \in [-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2]$
D) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}; x \in [-2; 2]$
E) No existe $F \circ G$.

88. Sean las funciones "f" y "g". Ambas con dominio $\mathbb{R}$ y tales que:

$$f(2x-1) = 4x^2 - 4x; g(x-2) = f(2x).$$

$$\text{Calcular: } E = 5\sqrt{\frac{(f \circ g)(0)}{14}}$$

- A) 10 B) 12 C) 15
D) 16 E) 20

89. Si: $f(x) = 2\sqrt{x}$; $x > 0$; $g(x) = 16x^2$

$$g \circ f \circ h = 128\sqrt{4x^2 - 1}; \text{ además:}$$

$$h(1) + h(2) = \sqrt{a} + \sqrt{b}; b > a.$$

$$\text{Calcular: } 5a + b.$$

- A) 10 B) 90 C) 120
D) 200 E) 180

90. Indicar el valor de "ab"; para que la función: $F: [a; 2] \rightarrow [2; b]$; donde: $F(x) = |x-1| + 2$; sea biyectiva.

- A) 8 B) 3 C) 6
D) 4 E) 12

91. Sea: $f(x) = \frac{3x+4}{|x+4|}$; tal que:

$$F: (-2; 0] \rightarrow (-1; 1]$$

Indicar si es sobreyectiva y su rango.

- A) NO, $(-1; 2]$ B) NO, $(-1; 1]$
C) NO, $(-1; 0]$
D) SI, $(1; 2]$ E) SI, $(-1; 1]$

92. Dada las funciones: $G(x) = mx + 4$; $H(x) = 5x - 3$. Hallar "m", tal que:

$$H^*[G^*(m)] = \frac{2}{5}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

93. Dadas las funciones:

$$F(x) = 2x - 6; G(x) = \frac{x}{2} + 3$$

Evaluar: $(F \circ G)^*(1)$

- A) 6 B) -6 C) 3
D) -3 E) 1

94. Sea: $g(x) = x^2 - 4x + 7$, restringir su dominio (si fuese necesario) y hallar su inversa.

$$A) x \in (-\infty; 2]; g^*(x) = 2 - \sqrt{x-3}$$

$$B) x \in (-\infty; 2]; g^*(x) = 2 + \sqrt{x-3}$$

$$C) x \in [3; +\infty); g^*(x) = 2 + \sqrt{x-3}$$

$$D) x \in [2; +\infty); g^*(x) = 2 + \sqrt{x-3}$$

E) Hay dos correctas.

95. Sea "f" una función definida por:

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

$$\text{Calcular: } (f + f^*)\left(\frac{1}{2}\right) + (f - f^*)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

96. ¿En qué intervalo, la función:

$$f(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor \text{ es inyectiva?}$$

$$A) \left[\frac{n}{2}; \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right]; n \in \mathbb{Z}$$

$$B) [n; n+1]; n \in \mathbb{Z}$$

$$C) \left[2n; \frac{n+1}{2} \right]; n \in \mathbb{Z}$$

$$D) \left[\frac{3n}{2}; \frac{n+1}{2} \right]; n \in \mathbb{Z}$$

$$E) \left[\frac{n}{2}; n+1 \right]; n \in \mathbb{Z}$$

97. Dada la función "f" definida en su dominio máximo, cuya regla es:

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x-4|}{\sqrt{x}-4}} + 1$$

Determinar su inversa, en caso exista:

- A) $f^*(x) = 4 - (x^2 - 1)^2$; $x > 1$
 B) $f^*(x) = 4 + (x^2 - 1)^2$; $x < 1$
 C) $f^*(x) = 4 - (x^2 - 1)^2$; $x < 1$
 D) $f^*(x) = 4 + (x^2 - 1)^2$; $x > 1$
 E) No presenta inversa.

98. Se define:

$$f(x) = 2\sqrt{x} - x$$

para: $x \in (0; 1)$, obtener: $f - f^*$

- A) $2\sqrt{x} + 2 - 2\sqrt{1-x}$
 B) $2x - 2\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$
 C) $2\sqrt{x} - 2 - \sqrt{1-x}$
 D) $2\sqrt{x} - 2 + 2\sqrt{1-x}$
 E) No presenta inversa.

99. Definida la función "f":

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+3}; x > 1$$

obtener f^* en caso exista.

- A) No posee inversa.
 B) $f^*(x) = 1 + \frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}$; $x \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$
 C) $f^*(x) = 1 + \frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}$; $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$
 D) $f^*(x) = 1 + \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2x}$; $x \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$
 E) $f^*(x) = 1 + \frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}$; $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$

100. Dados:

- I. $f(x) = x + |x|$ es creciente.
 II. $f(x) = x - |x|$ es no creciente.
 III. $f(x) = |x| - x$ es decreciente.
 IV. $f(x) = -x - |x|$ es no decreciente.

Son correctas:

- A) Ninguna B) I C) II
 D) III E) Todas



CLAVES

1	B
2	C
3	B
4	E
5	E
6	C
7	C
8	A
9	B
10	A
11	D
12	A
13	A
14	E
15	D
16	D
17	C
18	B
19	C
20	C
21	B
22	C
23	E
24	D
25	E

26	B
27	C
28	B
29	A
30	C
31	E
32	A
33	E
34	C
35	B
36	C
37	B
38	B
39	D
40	B
41	D
42	D
43	C
44	A
45	A
46	A
47	B
48	E
49	C
50	A

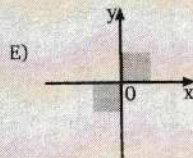
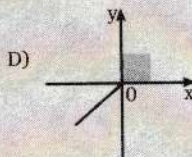
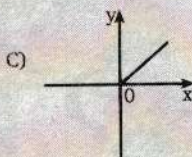
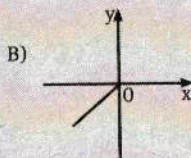
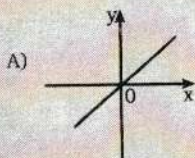
51	A
52	D
53	D
54	D
55	D
56	A
57	B
58	C
59	A
60	B
61	C
62	C
63	D
64	B
65	C
66	D
67	D
68	C
69	B
70	A
71	D
72	D
73	B
74	D
75	D

76	D
77	C
78	D
79	D
80	B
81	C
82	A
83	B
84	A
85	B
86	D
87	C
88	E
89	C
90	B
91	E
92	B
93	E
94	C
95	A
96	A
97	D
98	D
99	B
100	A

EXÁMENES DE ADMISIÓN UNIT

UNI - 2010 - I

PROBLEMA 01: Dada la siguiente relación:
 $y - |y| = x - |x|$ diga cuál de las siguientes gráficas es la que corresponde:

**Resolución:**

El valor absoluto se define:

$$|a| = \begin{cases} a & ; a \geq 0 \\ -a & ; a < 0 \end{cases} \quad \dots(1)$$

En el problema se tiene la relación:

$$y - |y| = x - |x| \quad \dots(1)$$

Analizando los valores de "y":

- Si $y \geq 0$, entonces aplicando (1) en la ecuación (1):

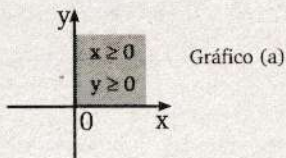
$$y - y = x - |x|$$

$$0 = x - |x|$$

$$\Rightarrow x = |x|$$

$$\Rightarrow x \geq 0$$

Su gráfica:



• Si $y < 0$, entonces aplicando (I) en la ecuación (1):

$$y - (-y) = x - |x|$$

$$2y = x - |x|$$

Analizando los valores de x , considerando (I):

Si $x \geq 0$:

$$2y = x - x$$

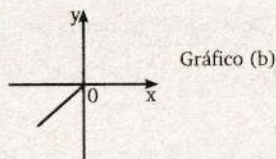
$$y = 0$$

Si $x < 0$:

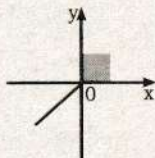
$$2y = x - (-x)$$

$$y = x$$

Su gráfica:



Considerando las gráficas (a) y (b):



Rpta.: D

PROBLEMA 02: Si las raíces de la ecuación:

$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ son $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ y las raíces de la ecuación $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$ son y_1 , y_2 . Entonces el valor de $y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2$ es:

A) 213000

B) 313000

C) 413000

D) 513000

E) 613000

Resolución:

Por el teorema de Cardano, si:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \dots(I)$$

Entonces, x_1 y x_2 son raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \quad \dots(II)$$

$$x_1 x_2 = \frac{C}{A} \quad \dots(III)$$

En el problema tiene las ecuaciones:

$$\bullet x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$$

$$\bullet y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$$

• Operando en la primera ecuación:

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$$

$$(1)(x^2) + [-(a+d)]x + (ad - bc) = 0$$

Considerando (I) en esta última ecuación:

$$A_1 = 1; B_1 = -(a+d); C_1 = ad - bc \quad \dots(1)$$

Por dato del problema se tiene las raíces:

$$x_1 = 3; x_2 = 5 \quad \dots(2)$$

Aplicando (II):

$$x_1 + x_2 = -\frac{B_1}{A_1}$$

De (1) y (2):

$$3 + 5 = \frac{(a+d)}{(1)}$$

$$8 = a + d \quad \dots(3)$$

Aplicando (III):

$$x_1 x_2 = \frac{C_1}{A_1}$$

De (2) y (3): $(3)(5) = \frac{ad - bc}{(1)} \quad \dots(4)$

$$15 = ad - bc$$

• Operando en la segunda ecuación:

$$y^2 - (a^3 + d^3 + abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$$

$$y^2 - [a^3 + d^3 + 3bc(a + d)] + (ad - bc)^3 = 0 \quad \dots(5)$$

Por identidades algebraicas:

$$(a + d)^3 = a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3$$

De (3): $8^3 = a^3 + d^3 + 3ad(a + d)$

$$\Rightarrow a^3 + d^3 = 8^3 - 3ad(a + d) \quad \dots(6)$$

Reemplazando (6) en (5):

$$y^2 - [(8^3 - 3ad(a + d) + 3bc(a + d))]y + (ad - bc)^3 = 0$$

$$y^2 - [8^3 - 3(a + d)(ad - bc)]y + (ad - bc)^3 = 0$$

De (3) y (4): $y^2 - [8^3 - 3(8)(15)]y + (15)^3 = 0$

$$(1)y^2 - 152y + 3375 = 0 \quad \dots(7)$$

Ahora, considerando las propiedades(I) , (II) y (III) de cardano en esta última ecuación:

$$\bullet y_1 + y_2 = -\frac{B_2}{A_2}$$

De (7): $y_1 + y_2 = -\frac{(-152)}{1}$

$$y_1 + y_2 = 152 \quad \dots(8)$$

$$\bullet y_1 y_2 = \frac{C_2}{A_2}$$

$$y_1 y_2 = \frac{3375}{1}$$

$$y_1 y_2 = 3375 \quad \dots(9)$$

Finalmente en la expresión a calcular:

$$y_1^2 y_2 = y_1 y_2^2 = y_1 y_2 (y_1 + y_2) \\ = 3375(152)$$

De (8) y (9): $= 513000$

Rpta.: D

PROBLEMA 03: Sean A, B conjuntos no vacíos. Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

- I. Si $(x, y); (x, z) \in f = \{(x, y)/x \in A, y \in B\} \subset A \times B$ implica que $y = z$, entonces podemos decir que f es una función de A en B.
- II. Toda función sobreyectiva $f: A \rightarrow B$ es inyectiva.
- III. Toda la función inyectiva $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva.

A) VVV

B) VFV

C) VFF

D) FFV

E) FFF

Resolución:

Definiciones:

- Una función $f: A \rightarrow B$ es una relación, tal que $f \subset A \times B$, y en sus pares ordenados $(x; y)$, para cada valor de la primera componente " x " $\in A$, le corresponde un solo elemento de la segunda componente $y = f(x) \in B$.
- Una función f es inyectiva si para cada $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$, se cumple:

$$\text{Si } x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \text{ó} \\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Una función es suryectiva si:

$$\text{Ran}(f) = B, \text{ donde } \text{Ran}(f) = f(A)$$

En el problema, analizando las proposiciones:

I. VERDADERA (V)

Sustentación:

Las implicancia $y = z$ nos indica que solo existe un par ordenado $(x; y)$, es decir, no existe mas de un valor de " y " que le corresponde a la primera

componente "x", lo cual garantiza que sea una función. Lo contrario, si $y \neq z$, implica que para dos valores de la segunda componente existe un sólo valor de "x", hecho que contradice la definición de función.

II. FALSA (F)

Sustentación:

Ejemplo si : $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty); y = f(x) = x^2;$
 $\text{Ran}(f) = y = [0; \infty)$, es suryectiva

Pero si $(x_1 = -1 \text{ y } x_2 = 1) \text{ que } \in \text{Dom}(f)$
 $x_1 \neq x_2 \text{ y } f(x_1) = f(x_2)$
 $-1 \neq 1 \quad (-1)^2 = (1)^2$
 $1 = 1$

Entonces no es función biyectiva

III.FALSA (F)

Sustentación:

Ejemplo si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva pero $\text{Ran}(f) \neq \mathbb{R}$, por lo tanto no es inyectiva.

La secuencia correcta de las proposiciones: VFF

Rpta.: C

PROBLEMA 04:

Sea S el conjunto solución de la ecuación, en $\mathbb{R}$, $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = \frac{1}{\log_x \left(\frac{3}{5} \right)}$

Halle la cantidad de elementos de S.

- | | | |
|------|------|------|
| A) 0 | B) 1 | C) 2 |
| D) 3 | | E) 4 |

Resolución:

Por definición de logaritmo:

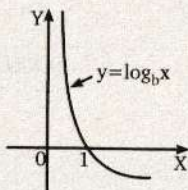
$$\log_b x = N \Leftrightarrow b^N = x; b, x, N \in \mathbb{R} \quad \dots(I)$$

Donde : $b, x, N \in \mathbb{R}; b > 0 \wedge b \neq 1 \wedge x > 0$

- Propiedad:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad \dots(II)$$

- La gráfica de la función logaritmo cuando $0 < b < 1$:



En el problema:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = \frac{1}{\log_x \left(\frac{3}{5} \right)} ; x \in \mathbb{R}$$

De (I):

$$x > 0 \wedge x \neq 1 \quad \dots(1)$$

Aplicando la propiedad (II):

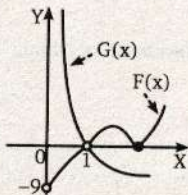
$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = \frac{1}{\log_x \left(\frac{3}{5} \right)} ; x > 0 \wedge x \neq 1$$

$$\underbrace{(x-1)(x-3)^2}_{F(x)} = \underbrace{\frac{1}{\log_{\left(\frac{3}{5}\right)}(x)}}_{G(x)}$$

Para hallar el conjunto solución "S" de la ecuación, para los cuales, las dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ tienen el mismo valor. En un gráfico, el punto donde se intersectan las dos curvas:

Observe que las dos curvas se intersectan en $x=1$; pero para $G(x)$ este valor no está definido, por tanto, no se admite como solución.

Luego se concluye que el conjunto solución "S" tiene cero (0) elementos.



está definido, por tanto, no se admite como solución.
Luego se concluye que el conjunto solución "S" tiene cero(0) elementos.

Rpta.: A

PROBLEMA 05: Dadas las siguientes proposiciones:

I. Las raíces de $e^{in} - 1 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, pertenece a un polígono regular de n lados,
 $\forall n \in \mathbb{N}$

II. Si $e^{i\theta} = a + bi$ y $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$, entonces

$$a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } b \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$$

III. Dados $\alpha, \beta \in (0; 2\pi)$, tales que $\beta > \alpha$, si $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$, entonces
 $e^{i(\alpha+\beta)} = 1$

Indique cuáles son correctas:

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) I y II

E) II y III

Resolución:

Un número complejo se define como:

$$Z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \dots(I)$$

$$= a + bi \quad \dots(II)$$

I. INCORRECTA

Sustentación:

En la expresión:

$$e^{in} - 1 = e^{i0} - 1 = 0 \quad ; n = 0$$

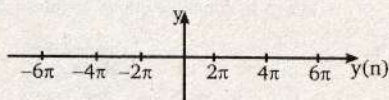
$$\Rightarrow e^{i0} = 1$$

$$\Rightarrow e^{i0} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

Donde: $k \in \mathbb{Z}$

Luego se deduce que: $e^{in} = e^{2k\pi i} \Rightarrow n = 2k\pi$

Graficando:



Las raíces de la ecuación pertenecen a una línea recta, y no formar un polígono.

II. INCORRECTA

Sustentación:

De las expresiones:

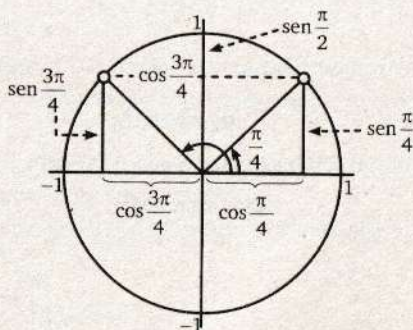
$$Z = e^{i\theta} = a + bi \quad \dots(1)$$

$$\theta = \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$$

De estas dos expresiones, (I) (II) se deduce:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos \frac{3\pi}{4} < \cos \theta < \cos \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \theta < \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin \frac{3\pi}{4} < \sin \theta \leq \sin \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \theta \leq 1 \quad \dots(3) \end{aligned}$$



Comparando (I) y (III) se deduce:

$$a = \cos \theta ; b = \sin \theta$$

Luego de (2) y (3) se concluye:

$$a \in \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle \text{ y } b \in \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right]$$

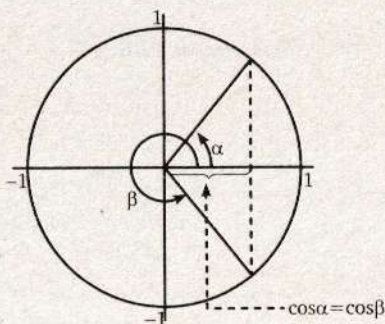
Observe que b puede tomar el valor de "1", lo cual contradice la proposición, por lo tanto, ésta es incorrecta.

III. CORRECTA

Sustentación:

Si: $\alpha, \beta \in (0; 2\pi)$; $\beta > \alpha$ y $\cos \alpha = \cos \beta$

En el gráfico:



Se deduce:

$$\alpha + \beta = 2\pi$$

Luego por comparación con la expresión (I):

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i2\pi} = \cos 2\pi + \text{sen} 2\pi = 1$$

!La proposición es correcta!

En conclusión, solo la proposición III es correcta.

Rpta.: C

PROBLEMA 06:

Si $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Calcule $S = A^{42} + A^{55}$

A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Resolución:

Si se tiene las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

La suma y el producto:

$$A+B = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix} \quad \dots(I)$$

$$A.B = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix} \quad \dots(II)$$

En el problema , se tiene la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la definición (II):

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A.A^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⋮

$$A^5 = A \cdot A^4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En general:

$$A^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; 2^{2k+1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots(*)$$

Donde $K \geq 0$

$$S = A^{42} + A^{55} \\ = A^{2k_1} + A^{2k_2+1}$$

De(*):

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 07: Dado el sistema

$$2x - y + z = 1$$

$$x + 4y + 2z = -1$$

¿Cuál de la siguiente ecuaciones?

I. $x - 5y - z = 2$

II. $3x + 3y + 3z = 2$

III. $5x + 2y + 4z = 1$

puede agregarse al sistema anterior de modo que el conjunto solución no varíe?

A) Solo I

B) I y II

C) I y III

D) Solo II

E) Solo III

Resolución:

En el problema se tiene el sistema:

En el problema se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 & \dots(1) \\ x + 4y + 2z = 1 & \dots(2) \end{cases}$$

Analizando las ecuaciones:

I. El conjunto solución no varía

Sustentación:

Si restamos la ecuación (2) de la (1):

$$\begin{array}{r} 2x - y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ \hline x - 5y - z = 2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (-) \quad \dots(3)$$

Entonces podemos agregar esta ecuación (3) al sistema, sin que se altere su conjunto solución.

II. El conjunto solución si varía

Sustentación:

Si sumamos la ecuación (1) con la (2):

$$\begin{array}{r} 2x - y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ \hline 3x + 3y + 3z = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (+) \quad \dots(4)$$

No se ha obtenido la ecuación III; en (4) se ha logrado obtener el primer miembro, pero no el segundo miembro, lo cual garantiza que, mediante estas operaciones, no se pueda obtener una ecuación igual a la III. Luego podemos afirmar que la ecuación mencionada si alteraría el conjunto solución del sistema.

III. El conjunto solución no varía

Solución:

Si sumamos el doble de la ecuación (1) con la (2):

$$\begin{array}{r} x^2: 2x - y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ \hline 5x + 2y + 4z = 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (+) \quad \dots(5)$$

En (5) se ha obtenido la ecuación III, por lo tanto, si puede agregarse esta ecuación sin que altere el conjunto solución.

Conclusión:

Puede agregarse las ecuaciones I y III al sistema, de modo que el conjunto solución no varíe.

Rpta.: C

PROBLEMA 08:

En relación a un programa lineal, indique la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

- I. Las condiciones de no negatividad significan que todas las variables de decisión deben ser positivas.
- II. El número de puntos extremos de la región admisible es finito.
- III. En un programa lineal puede variarse los coeficientes de la función objetiva y aún mantenerse la solución óptima.

A) VFV

B) FFF

C) FFV

D) FVV

E) VFF

Resolución:

En el problema, analizando las proposiciones:

I. FALSA(F)

Sustentación:

Las condiciones de no negatividad significa que las variables x e y deben cumplir las condiciones:

$$x \geq 0 ; y \geq 0$$

es decir, deben incluir el cero.

II. VERDADERA(V)

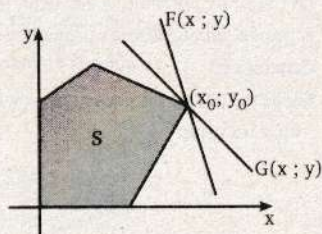
Sustentación:

Una región admisible es un polígono, cuyos vértices que en número son finitos, constituyen los puntos extremos de la región.

III. VERDADERA(V)

Sustentación:

Si en un programa lineal se varían los coeficientes de la función objetivo, puede que se mantenga la solución óptima.



En el gráfico $F(x; y)$ y $G(x; y)$ son las funciones objetivo y $(x_0; y_0)$ es solución óptima.

La secuencia correcta de las proposiciones : FVV

Rpta.: D

PROBLEMA 09:

Sea la sucesión $a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = \frac{1}{2}; a_4 = \frac{3}{4}; a_5 = \frac{5}{8}; a_6 = \frac{11}{16}; a_7 = \frac{21}{32}; a_8 = \frac{43}{64}; \dots$; entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge a:

A) $\frac{7}{12}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{2}{3}$

D) 1

E) ∞

Resolución:

En el problema, se tiene la sucesión a_n cuyos términos son:

$$0; 1; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \dots$$

$$\frac{1}{3} \left(0; 3; \frac{3}{2}; \frac{9}{4}; \frac{15}{8}; \dots \right)$$

$$\frac{1}{3} \left(0; 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^0; 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1; 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2; 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3; \dots \right)$$

$$\frac{1}{3} \left(0; 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1}; 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1}; 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{3-2}; \dots \right)$$

$$2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{4-1}; 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}; \dots$$

Luego el término n -ésimo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \left(2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{0} \right) \right] = \frac{2}{3}$$

Luego se concluye que $\{a_n\}$ converge a $\frac{2}{3}$

Rpta.: C

PROBLEMA 10: Dadas las funciones

$$f = \{(3;1), (2;-3), (5;0), (4;-4), (1;1)\},$$

$$g = \{(-4;3), (-2;7), (0;0), (1;5), (2;1)\} \text{ y}$$

$$h = \{(1;-4), (3;-2), (5;0), (7;2)\}$$

Determine la función compuesta fogoh.

A) $\{(1;0), (5;1)\}$

B) $\{(3;-3), (5;-4)\}$

C) $\{(1;1), (7;1)\}$

D) $\{(1;1), (2;-3)\}$

E) $\{(3;-1), (7;1)\}$

Resolución:

En el problema, se tiene la sucesión a_n cuyos términos son:

La función F compuesta con G , en ese orden, se define:

$$FOG: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = (F \circ G)(x) = F(G(x))$$

Donde:

$$\text{Dom}(F \circ G) = \{x / x \in \text{Dom}(G) \wedge G(x) \in \text{Dom}(F)\} \dots (I)$$

$$\text{Rang}(F \circ G) = \{y / y \in \text{Rang}(G)\}$$

En el problema, para hallar $f \circ g \circ h$ lo calculamos siguiente el orden operativo así

$$f \circ (g \circ h) = f \circ G$$

Determine de $g \circ h$:

$$g = \{(-4;3), (-2;7), (0;0), (1;5), (2;1)\}$$

$$h = \{(1; -4), (3; -2), (5; 0), (7; 2)\}$$

Aplicando la definición (I):

$$g \circ h = \{(x; y) / (x \in \text{dom}(h) \wedge g(x) = y \in \text{dom}(F))\}$$

$x \in \text{Dom}(h)$:

$$g \circ h = \{(1; \quad), (3; \quad), (5; \quad), (7; \quad)\}$$

$h(x) = y$, tal que, $y \in \text{Dom}(g)$:

$$g \circ h = \{(1; 3), (3; 7), (5; 0), (7; 1)\}$$

Determinación de $f \circ (g \circ h)$:

$$f = \{(3; 1)(2; -3)(5; 0)(4; -4); (1; 1)\}$$

$$G = g \circ h = \{(1; 3), (3; 7), (5; 0), (7; 1)\}$$

Similarmente al caso de $g \circ h$:

$$F \circ g \circ h = \{(1; 1), (7; 1)\}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 11: Considere la ecuación matricial

$$x \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ donde } X \text{ es una matriz. Calcule } \det(X)$$

A) 6

B) 7

C) 8

D) 11

E) 19

Resolución:

Si A y B son dos matrices cuadradas, entonces:

$$|AB| = |A||B| \quad \dots(I)$$

En el problema, se tiene dos matrices en el primer miembro de la igualdad:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando determinantes a la desigualdad:

$$\left| X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right|$$

Aplicando la definición (I):

$$|X| \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|X|(1 \cdot 7 - 2 \cdot 3) = 4 \cdot 2 - (-1) \cdot 0$$

$$|X|(1) = 8$$

$$\Rightarrow |X| = 8$$

Rpta.: C

UNI - 2010 - II

PROBLEMA 12: Dadas las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = |x - 2| + 2 \text{ y } g(x) = -(x^2 + 2)$$

Determine $f + g$.

$$\text{A) } \begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}, x \geq 2 \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}, x < 2 \end{cases}$$

$$\text{B) } \begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, x \geq 2 \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}, x < 2 \end{cases}$$

$$\text{C) } \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, x \geq 2 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}, x < 2 \end{cases}$$

$$\text{D) } \begin{cases} (x - 1)^2 + \frac{7}{4}, x \geq 2 \\ -(x + 1)^2 - \frac{1}{4}, x < 2 \end{cases}$$

$$\text{E) } \begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, x \geq 2 \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}, x < 2 \end{cases}$$

Resolución:

Definición, si las funciones $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces:

$$F_{(x)} + G_{(x)} = (F + G)_{(x)}, y$$

$$\text{Dom}(F + G) = \text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G)$$

• Definición de valor absoluto:

$$|Q(x)| = \begin{cases} Q(x) ; Q(x) \geq 0 \\ -Q(x) ; Q(x) < 0 \end{cases}$$

En el problema, para determinar $f(x) + g(x)$, si

$$f(x) = |x - 2| + 2 ; \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$g(x) = -x^2 - 2 ; \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

La suma de estas dos funciones:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (f + g)(x) \\ &= (|x - 2| + 2) + (-x^2 - 2) \\ &= |x - 2| - x^2 \end{aligned}$$

El dominio de esta suma de funciones:

$$\text{Dom}(f + g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Ahora, si consideramos la defunción de valor absoluto:

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x - 2 - x^2 ; x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) - x^2 ; x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} -x^2 + x - 2 ; x \geq 2 \\ -x^2 - x + 2 ; x < 2 \end{cases}$$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} ; x \geq 2 \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} ; x < 2 \end{cases}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 13:

Halle el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que la inecuación $(a^2 - 14)x^2 - 4x + 4a \leq 0$, tenga como solución el conjunto $[-2; 4]$.

A) -6

B) -4

C) -2

D) -1

E) $-\frac{1}{2}$

Resolución:

En una inecuación $Ax^2 + Bx + C > 0$, los puntos de la frontera

$(Ax^2 + Bx + C = 0)$ son sus raíces, que por ser cuadrática son dos.

• Teorema de Cardano - Viette, para una ecuación cuadrática

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \quad \dots(1^*)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} \quad \dots(2^*)$$

En el problema se tiene la inecuación:

$$(a^2 - 14)x^2 - 4x + 4a \leq 0 \quad \dots(1)$$

Donde: $A = a^2 - 14$; $B = -4$; $C = 4a$... (2)

Como se requiere que la solución de la inecuación (1) se de en el intervalo

$[-2; 4]$ entonces los puntos críticos "- 2" y "4" son las raíces de la frontera:

$$(a^2 - 14)x^2 - 4x + 4a = 0$$

Donde: $x_1 = -2$; $x_2 = 4$... (3)

Aplicando el teorema (1*) y de (2):

$$x_1 + x_2 = \frac{4}{a^2 - 14}$$

De (3): $-2 + 4 = \frac{4}{a^2 - 14}$

$$a^2 = 16$$

$$\Rightarrow a = \pm 4$$

Aplicando el teorema (2*) y de (2):

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4a}{a^2 - 14}$$

De (3): $(-2)(4) = \frac{4a}{a^2 - 14}$

$$(a + 4)(2a - 7) = 0$$

$$\Rightarrow a = -4 \vee a = \frac{7}{2}$$

Como $a = -4$ satisface los dos teoremas de Cardano - Viette se acepta como la única solución.

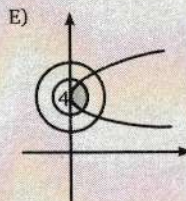
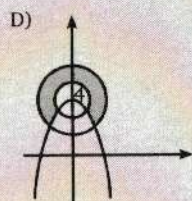
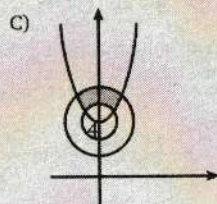
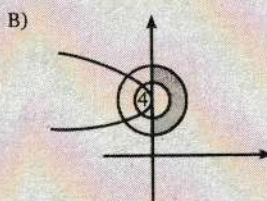
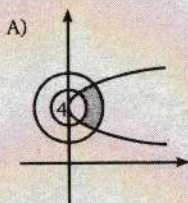
Rpta.: B

PROBLEMA 14:

Sean los números complejos $z = x + iy$ y $u = \sqrt{x} + iy$, $x > 0$ y los conjuntos

$$A = \{z / 1 \leq |z + 4i| \leq 2\}, \quad B = \{u = \sqrt{x} - iy / |u + 4i| \geq 0\}$$

¿Cuál de las siguientes gráficas representa a $A \cap B$?



Resolución:

Si $z = a + bi$ es un número complejo, su conjugada se define:

$$\bar{z} = a - bi \quad \dots(1^*)$$

Propiedades:

$$\bullet \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad \dots(2^*)$$

$$\bullet |\bar{z}| = |z| \quad \dots(3^*)$$

Si $|z|$ es el modulo del numero complejo, entonces:

$$|z| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \dots(4^*)$$

En el problema se tiene:

Los números complejos:

$$z = x + iy ; u = \sqrt{x} + iy \quad \dots (*)$$

Los conjuntos:

$$A = \{z / 1 \leq |\bar{z} + 4i| \leq 2\}$$

$$B = \{u = \sqrt{x} - iy / |u + 4i| \geq 0\}$$

Del conjunto B, de la expresión $\sqrt{x}$ se obtiene el conjunto de valores admisibles:

$$x \geq 0$$

Operando en la "regla de correspondencia" del conjunto A:

$$1 \leq |\bar{z} + 4i| \leq 2$$

De (4*):

$$1 \leq |\overline{z + 4i}| \leq 2$$

De (2*):

$$1 \leq |\overline{z} + 4i| \leq 2$$

De (3*) y (1*):

$$1 \leq |z + (-4i)| \leq 2$$

$$1 \leq |z - 4i| \leq 2$$

De (*):

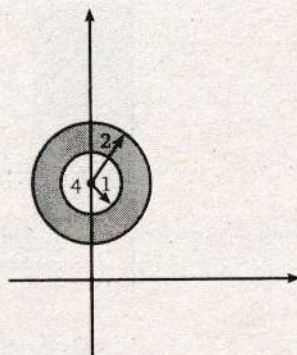
$$1 \leq |(x + yi) + (-4i)| \leq 2$$

$$1 \leq |x + (y - 4)i| \leq 2$$

De (4*):

$$1 \leq \sqrt{x^2 + (y - 4)^2} \leq 2$$

$$1 \leq x^2 + (y - 4)^2 \leq 2^2 \quad \dots (II)$$



Operando con la "regla de correspondencia" del conjunto B

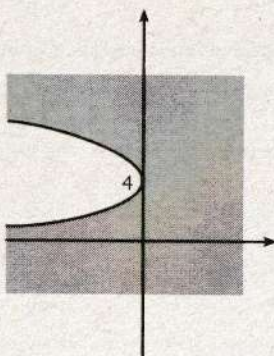
$$|u + 4i| \geq 0$$

De (*): $|(\sqrt{x} - yi) + 4i| \geq 0$

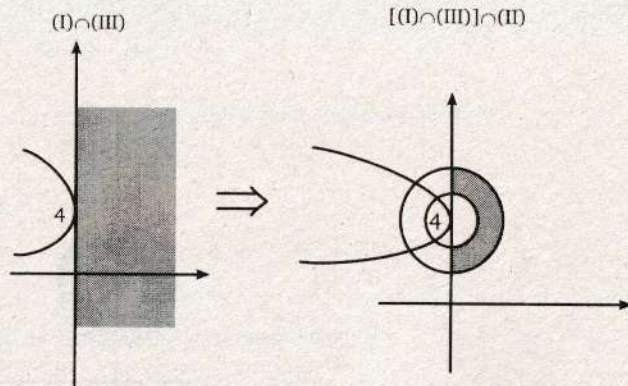
$$|(\sqrt{x} - (y - 4)i)| \geq 0$$

De (4*): $\sqrt{(\sqrt{x})^2 + (y - 4)^2} \geq 0$

$$x + (y - 4)^2 \geq 0 \quad \dots(\text{III})$$



Finalmente obtenemos el gráfico:



Rpta.: B

PROBLEMA 15: Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F)

I. Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces $A - A^T = 0$

II. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, donde n es un número natural.

III. Si $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+a & 5 \\ 1+b & 4 \end{bmatrix}$, entonces $a - b = 0$

A) VVV

B) VVF

C) FFV

D) FVV

E) FFF

Resolución:

La transpuesta A^T de una matriz A se obtiene intercambiando filas por columnas y viceversa.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & x \\ b & y \end{bmatrix} \quad \dots (*)$$

En el problema, analizando las proposiciones:

I. Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces

$$A - A^T = 0 \quad \text{FALSA(f)}$$

Sustentación:

Consideremos como ejemplo una matriz de orden 2×2 .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 1-1 & 0-5 \\ 5-0 & 7-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A - A^T \neq 0$$

Como existe al menos un ejemplo de donde la proposición no se cumple, entonces ésta se considera falsa.

$$\text{II. Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ entonces } A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde n es un número natural.

VERDADERO(V)

Sustentación:

Si: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

III.Si

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+a & 5 \\ 1+b & 4 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$a - b = 0$$

VERDADERO(V)

Sustentación:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ b & 1 \end{bmatrix}}_{(I)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2+a & 5 \\ 1+b & 4 \end{bmatrix}}_{(II)}$$

Ejecutando la multiplicación en (I):

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & 3a+2 \\ b+1 & 4 \end{bmatrix}$$

Igualando elementos:

$$\bullet \quad 5 = 3a + 2 \Rightarrow a = 1 \quad \dots(*)$$

$$\bullet \quad 2 + a = b + 1$$

$$\text{De } (*): \quad 2 + (1) = (1) + 2b \quad b = 1$$

Calculando la expresión:

$$a - b = 1 - 1 = 0$$

La secuencia correcta de las proposiciones : FVV

Rpta.: D

PROBLEMA 16: Dados los conjuntos,

$$A = \{(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2 / (a_1; a_2) \in [3; 4] \times [4; 5]\}$$

$$B = \{(b_1; b_2) \in \mathbb{R}^2 / b_1^2 + b_2^2 \leq 1\}$$

Si se define $A + B = \{\bar{a} + \bar{b} / \bar{a} \in A; \bar{b} \in B\}$, determine el área de $A + B$

A) $1 + \pi$

B) $2 + \pi$

C) $3 + \pi$

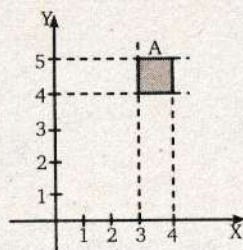
D) $5 + \pi$

E) $6 + \pi$

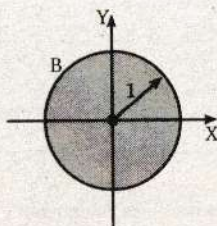
Resolución:

En el problema se plantea los conjuntos A y B que definen a la área de dos superficies:

$$\bullet A = \{(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2 / (a_1; a_2) \in [3; 4] \times [4; 5]\}$$



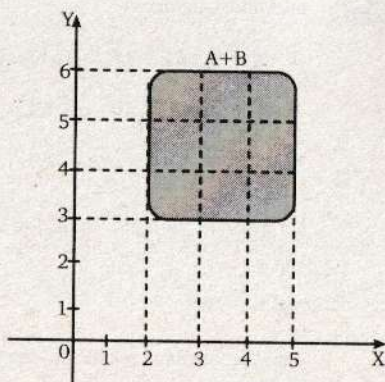
$$\bullet B = \{(b_1; b_2) \in \mathbb{R}^2 / b_1^2 + b_2^2 \leq 1\}$$



La suma de estos dos conjuntos:

$$A + B = \{\bar{a} + \bar{b} / \bar{a} \in A; \bar{b} \in B\}$$

$$A + B = \{(a_1 + b_1; a_2 + b_2) \in \mathbb{R}^2 / a_1; a_2 \in A; b_1, b_2 \in B\}$$



El área de A+B:

$$A_{A+B} = 5(1 \times 1) + 4 \left(\frac{1}{4} \pi (1^2) \right)$$

$$A_{A+B} = 5 + \pi$$

Rpta.: D

PROBLEMA 17: Determine el valor mínimo que toma la función objetivo, $P(x; y) = 10x + 20y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ y \leq x \end{cases}$$

A) -70

B) -20

C) 0

D) 20

E) 30

Resolución:

Los valores máximos y mínimos de una función objetivo se ubican en los vértices del polígono que conforma la región admisible R, el cual se forma por la intersección de las inecuaciones de las restricciones.

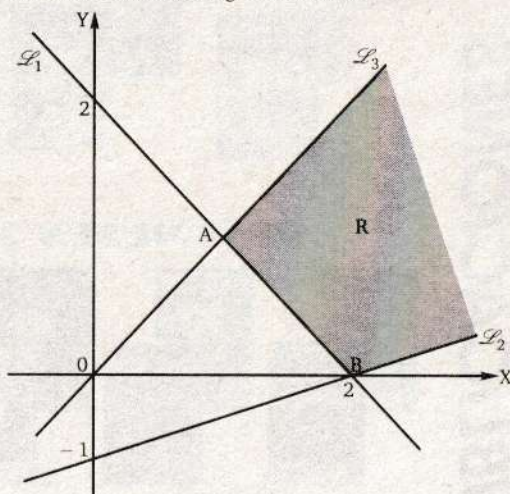
En el problema se tiene la función objetivo:

$$P(x; y) = 10x + 20y \dots (*)$$

y las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 & ; L_1 \\ x - 2y \leq 2 & ; L_2 \\ y \leq x & ; L_3 \end{cases}$$

Graticando estas restricciones se obtiene la región admisible:



Calculando los vértices A y B:

$$A = L_1 \cap L_3: \quad x + y = 2 \wedge x - y = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \wedge y = 1$$

$$\Rightarrow A = (1; 1)$$

$$B = L_1 \cap L_2: \quad x + y = 2 \wedge x - 2y = 2$$

$$\Rightarrow x = 2 \wedge y = 0$$

$$\Rightarrow B = (2; 0)$$

Evaluando estos valores en la función objetivo para determinar su valor mínimo.

$$P(x; y) = 10x + 20y$$

$$A = (1; 1): \quad P(1; 1) = 10(1) + 20(1) = 30$$

$$B = (2; 0): \quad P(2; 0) = 10(2) + 20(0) = 20$$

$$\therefore P(x; y)_{\min.} = 20$$

Rpta.: D

- | | |
|-----------|---|
| 2 | El polinomio - Productos Notables |
| 3 | División Algebraica - Divisibilidad algebraica |
| 4 | Factorización - Fracciones Algebraicas |
| 5 | Radicación - Racionalización |
| 6 | Potencia de un Binomio - Factorial de un Número - Combinatoria |
| 7 | Números Complejos |
| 8 | Ecuaciones |
| 9 | Desigualdades - Inecuaciones |
| 10 | Relaciones - Funciones |
| 11 | Función Exponencial - Logaritmos |
| 12 | Sucesiones, Series y Progresiones |
| 13 | Matrices - Determinantes |
| 14 | Sistema de Ecuaciones |
| 15 | Programación Lineal - Gráfica de Relaciones |

Tel.: 424 - 6350

Cel.: 992 - 796104

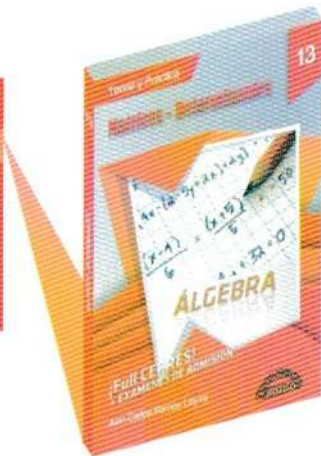


Editorial RODO - Oficial



editorialrodo@gmail.com

Aritmética (15 folletos)
 Álgebra (15 folletos)
 Geometría (14 folletos)
 Trigonometría (17 folletos)
 Raz. Matemático (18 folletos)
 Física (16 folletos)
 Química (16 folletos)



- ✓ 140 páginas
- ✓ Marco teórico completo.
- ✓ 100 problemas resueltos
- ✓ 100 problemas propuestos con claves.
- Básico · Intermedio · Avanzado
- ✓ Exámenes de admisión resueltos.

* Datos Referenciales

N°

1

TEMAS

Leyes de Exponentes - Ecuaciones Exponenciales